極小範圍的函數圖形

單維彰・2013 年 4 月

在上一節中，我們知道一個以 c 為參考點的泰勒多項式，它的零次項跟一次項決定一條直線，所以函數圖形在很小的範圍裡，看起來會像一條直線。但再精確一點，如果一次項的係數是零呢？如果一次項的係數是零，我們也可以說在很小的範圍裡，它像一條水平線，但如果稍微遠離一點來看的時候，則它會像一個二次曲線。

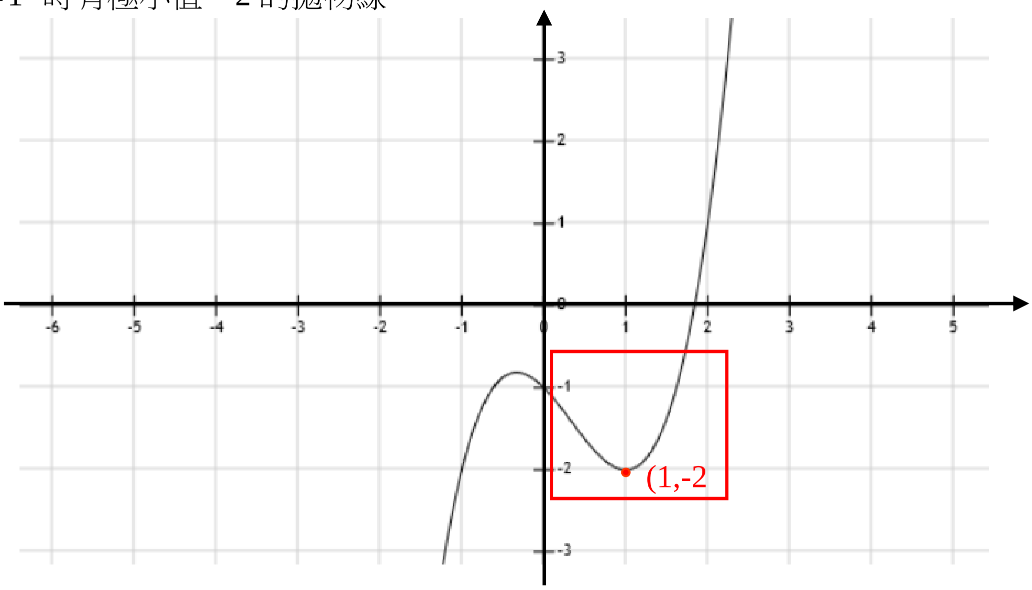
舉一例子：三次多項式函數 $f(x)=x^3-x^2-x-1$，我們要寫成以 1 為參考點的泰勒形式。利用綜合除法：

$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & -1 & -1 & -1 & \big|\,1 \\
 & 1 & 0 & -1 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & -2 & \longrightarrow \text{常數項} \\
 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & \longrightarrow \text{一次項係數} & \\
 & 1 & & & \\
\hline
1 & 2 & \longrightarrow \text{二次項係數} & & \\
\llcorner\!\!\longrightarrow \text{三次項係數} & & & &
\end{array}
$$

如果要估計函數局部範圍的值時，我們會使用升冪排列，所以可以將上式寫成

$$f(x)=-2+2(x-1)^2+(x-1)^3$$

其一次項係數為 0，在一個很小的範圍內，如果二次項和三次項都忽略不看的話，它就像水平線 $f(x)=-2$，但實際上，這是要在很小很小的範圍裡時，它才會是如此。如果在稍微寬一點的範圍來看，我們不忽略二次項時，例如：$x=1.1$，且要準確到百分位時，那麼就不能忽略二次項，但三次項仍舊可忽略。此時會是二次多項式函數 $f(x)=-2+2(x-1)^2$ ，是一個以 $(1,-2)$ 為頂點，開口朝上，在 $x=1$ 時有極小值－2 的拋物線。



在上圖中，從不是一個太小的範圍裡(紅框處)來看，這個三次多項式函數的圖形，忽略其他地方，就像一個開口向上的拋物線。

一般而言，給一個 n 次多項式函數

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_0$$

寫成以 a 為參考點，升冪排列的泰勒形式

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+......$$

我們從上述可推論出，如果 $c_1=0$，且 $c_2>0$，則函數 $y=f(x)$ 在參考點 a 的附近，其圖形就像開口向上的拋物線，且在 $x=a$ 處發生極小值 $f(a)$；如果 $c_2<0$，其圖形就像一個開口向下的拋物線，且在 $x=a$ 處發生極大值 $f(a)$。

所以，一個 n 次多項式函數有沒有極大或極小值呢？如果有的話它會在哪裡呢？到目前為止，我們已經知道一半的答案了，只要我們能夠找到某一數 a，使得以 a 為參考點做泰勒形式時，一次項係數 c_1 為 0，接下來再討論 c_2 是否為 0？或者為正？或者為負？我們就可以知道函數在 $x=a$ 發生極大值或極小值。但是其實我們忽略了一件很重要的事情，我們該如何知道哪一個 a，使得它對應的 c_1 為 0，進而找到多項式函數的極大或極小值呢？這就是微分要告訴我們的事情，微分會提供我們一套技術，讓我們可以算出來哪一個 a 所對應的泰勒形式，其一次項係數 c_1 為 0。