極大極小值的判定

單維彰・2013 年 4 月

我們知道，任何一個 n 次多項式函數，透過綜合除法，可以改寫成以 a 為參考點的泰勒多項式，其中 a 是任意的實數，如下式：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

當 $a=0$ 時，泰勒多項式就會還原到標準式。然而我們也知道，習慣上會用降冪的形式寫標準多項式，但是當我們在寫成泰勒多項式時，因為 x 在 a 的附近，$|x-a|$是一個相當小的數，而越高的次方代表的數也就越小，便可以忽略不計，所以我們在討論函數值時，只需考慮低次方項，會使用升冪的形式來寫標準多項式。

根據餘式定理，或是直接將 x 代入 a，我們知道常數項 c_0 是函數 f 在點 a 的值，即 $c_0 = f(a)$ 。而我們現在也已知 c_1 即為 $f'(a)$。

> $f'(x)$ 是多項式函數 $f(x)$ 微分一次的結果，稱為 f 的(一次)導函數。
> 代入 $x=a$ 後，求得導函數在 a 點的值 $f'(a)$，稱為 f 在 a 的導數[1]。

接下來我們要探討 c_2 ，以下介紹兩種方法：

方法 1.

$$f(x) \div (x-a) = q_1(x) \ldots f(a)$$
$$q_1(x) \div (x-a) = q_2(x) \ldots q_1(a) \text{，其中 } q_1(a) = f'(a)$$

而 c_2 就是商式 $q_2(x)$ 在 a 的函數值，即為$q_2(a)$，所以我們知道給一個多項式函數，此程序一定可以算出 c_2。

以下舉一例說明：首項係數為 1 的單項函數 $f(x)=x^n$ ，已知

$q_1(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots\ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ ，利用綜合除法

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & a & a^2 & \ldots\ldots & a^{n-2} & a^{n-1} & \underline{\ a\ } \\ & a & 2a^2 & \ldots\ldots & (n-2)a^{n-2} & (n-1)a^{n-1} & \\ \hline \underbrace{1 \quad 2a \quad 3a^2 \quad \ldots\ldots \quad (n-1)a^{n-2}}_{q_2(x)\text{的係數}} & & & & & na^{n-1} \longrightarrow & q_1(a) \end{array}$$

---

[1]導數就是「推導出來的數」，代表的是函數在某一點一次微分的函數值。與倒數不同，例如：3 的倒數是$\dfrac{1}{3}$ ，$\dfrac{1}{2}$的倒數是 2。

得到 $q_2(x)=x^{n-2}+2ax^{n-3}+3a^2x^{n-4}+......+(n-1)a^{n-2}$

$$
\begin{aligned}
c_2=q_2(a)&=a^{n-2}+2aa^{n-3}+3a^2a^{n-4}+......+(n-1)a^{n-2}\\
&=a^{n-2}+2a^{n-2}+3a^{n-2}+......+(n-1)a^{n-2}\\
&=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}
\end{aligned}
$$

我們算出了最基本例子的 c_2。但如果是對一般的多項式函數而言，還須考慮每一項前的係數，就沒有這麼容易計算，所以我們有了方法 2。

方法 2.

$$\text{觀察}\quad (x^n)'=nx^{n-1}$$

現在我們將 $(x^n)'$ 再做一次微分，寫作[2] $(x^n)''$，得到

$$(x^n)''=(nx^{n-1})'=n(x^{n-1})'=n(n-1)x^{n-2}$$

若 $f(x)=x^n$，則 $c_2=\frac{1}{2!}f''(a)$，依此類推，在將來我們會學到

$$c_3=\frac{1}{3!}f'''(a)\text{ ，}\ c_4=\frac{1}{4!}f''''(a)\ ......$$

在方法 1 中，因為除法沒有線性性質，我們並不能得到什麼公式；但是在方法 2 中，我們知道微方有線性性質，所以可以對任意的多項式函數做一次微分得到一次導函數，然後再微分一次得到二次導函數。

以下舉一例說明：

$$f(x)=x^3-x^2-x-1$$

$$f'(x)=3x^2-2x-1$$

在上個章節中，我們已知 $f'(x)=0$ 的根有 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{3}$，及 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $-\frac{1}{3}$ 處會發生極值，但不能確定誰是極大值，誰是極小值，我們需要知道的是 c_2 的性質符號，若 $c_2>0$，則函數在 $x=a$ 的附近是一個開口向上的拋物線，其頂點會是極小值；若 $c_2<0$，則函數在 $x=a$ 的附近是一個開口向下的拋物線，其頂點會是極大值。在方法 2 中我們已知 $c_2=\frac{1}{2!}f''(a)$，所以 c_2 和 $f''(a)$ 的性質符號是相同的，所以我們只需將兩根 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$ 代入二次導函數

---

[2] $f''(a)$ 為 f 在 a 的二次導數。

中，即可判定在 $x=1$ 處發生的是極大或極小值，在 $x=-\frac{1}{3}$ 處發生的是極大或極小值。

於是我們繼續計算二次導函數為

$$f''(x)=6x-2$$

將 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$ 代入，得到

$$f''(1)=4>0 \text{，} f''(-\frac{1}{3})=-4<0$$

最後我們再將 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$ 代入函數中，得到

$$f(1)=-2 \text{，} f(-\frac{1}{3})=-\frac{22}{27}$$

根據以上資訊，我們「差不多」可以畫出此三次多項式函數的圖型，如下圖所示。