導函數在 a 點的解

單維彰・2013 年 4 月

在前面的課程中，我們已經發展出：微分就是套用一組很簡單的公式，算出一個多項式函數的導函數。而我們現在要來定義一個一般性的導數和導函數，已知

$$f(x)\div(x-a)=q_1(x)\ldots\ldots f(a)$$

而

$$f'(a) \text{ 就是將 } x=a \text{ 代入商式 } q_1(x) \text{ 中}$$

根據除法原理，我們可將式子寫作

$$f(x)-f(a)=[q_1(x)](x-a)$$

移項後

$$q_1(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

而我們又知道

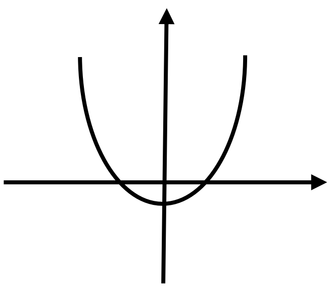
$$f'(a)=q_1(a)$$

但是我們不能將 $x=a$ 代入，因為分母為 0 是沒有意義的，所以這個式子就跟完整的 $q_1(x)$ 差了一個點。

先讓我們看一個例子，給一個三次多項式 $f(x)=x^3-x^2-x-1$，計算 $(x^3-x^2-x-1)\div(x-1)$，利用綜合除法

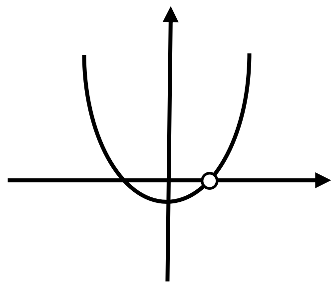
$$\begin{array}{cccc|l}
1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
 & 1 & 0 & -1 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & -2 &
\end{array}$$

得到 $q_1(x)=x^2-1$，將其圖形畫出，如下圖所示



我們可看出圖形是對稱於 y 軸的。

考慮 $y=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 的圖形，如下圖所示



在圖形中，若 $x=1$ 時函數是沒有定義的，所以我們畫了一個空心的點。比較 $q_1(x)=x^2-1$ 的圖形，兩個圖形就只差在 $x=1$ 那一點。

為了解決這個尷尬的現象，我們將 $f'(a)$ 寫成下列形式[1]：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

這個形式其實就是要化解我們不能將 $x=a$ 代入式子的情況，在形式中當 x 越來越靠近 a 的時候，最後會將那個空心點補起來。所以我們用 limit 的形式來寫出 f 在 $x=a$ 上的導數定義。以上形式的定義，就稱為「導數的極限定義」。

limit 這個觀念除了將剛剛冗長的一番話，換成了一個很簡單的式子，在數學和物理領域上也有很大的發展。

[1]lim 原文為 limit，是「極限」的意思。