泰勒形式意在估計

單維彰・2012 年 10 月

先考慮最簡單的情況：只要將多項式的標準形式改寫成升冪排列，就是它以 0 為參考點的泰勒形式。例如 $Q=x^3+x^2+x+1$ 之以 0 為參考點的泰勒形式為 $1+x+x^2+x^3$。將 Q 作為三次函數 $f(x)$ 的數學關係式，亦即 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，我們如何概算 $f(0.02)$ 至小數點下第二位？

在國小和國中都學過概算，但那時經常是「假」的：同學們總是把真正的答案算出來之後，再取四捨五入的概數。那是假的概算。真正的概算，是根本不知道真正的數值，而直接估計其「差不多」的數值。

以上的估計問題在計算機時代看起來很無聊，只要叫計算機處理就好了。但是，誠如人們常說的：『聰明反被聰明誤』，有時候太聰明了會錯過重要的關鍵。此處的學習重點是一個非常要緊的觀念：**函數的局部性質**。讓我們學下去吧。

我們先將 $f(x)$ 寫成以 0 為參考點的泰勒形式

$$f(x)=1+x+x^2+x^3\text{，}$$

代入 $x=0.02$ 就是

$$f(0.02)=1+0.02+(0.02)^2+(0.02)^3\text{，}$$

稍微想一下就知道 $(0.02)^2<0.001$ 而且 $(0.02)^3<0.001$，所以它們根本不會影響小數點下第二位的估計值，可以捨去不算。因此，我們斷定

$$f(0.02)\approx 1+0.02=1.02\text{。}$$

但是，我們不能用相同的程序做 $f(0.98)$ 在小數點下第二位的估計值。因為 $f(0.98)=1+0.98+(0.98)^2+(0.98)^3$ 之中的 $(0.98)^2$ 和 $(0.98)^3$ 很不容易算，可能也不太小，不能夠捨去不算。這就是以 1 為參考點的泰勒形式該上場的時候了！

假如我們已經知道 $Q=4+6(x-1)+4(x-1)^2+(x-1)^3$，則 $f(x)$ 寫成以 1 為參考點的泰勒形式就是

$$f(x)=4+6(x-1)+4(x-1)^2+(x-1)^3\text{，}$$

代入 $x=0.98$ 就是

$$\begin{aligned}f(0.98)&=4+6(0.98-1)+4(0.98-1)^2+(0.98-1)^3\\&=4+6\cdot(-0.02)+4\cdot(-0.02)^2+(-0.02)^3\end{aligned}$$

這時候我們很有信心 $4\cdot(0.02)^2-(0.02)^3<0.005$，不會進位到小數點下第二位，所以可以捨去它們。因此，我們斷定

$$f(0.98)\approx 4-6\cdot(0.02)=3.88$$ 。

（如果你好奇的話， $f(0.98)$ 真正的值是 3.881592，其實也可以用泰勒形式算出來： $f(0.98)=4-6\cdot(0.02)+4\cdot(0.0004)-0.000008=3.8816-0.000008$
$=4.121592$ 。）

寫成泰勒型式的目的就是為了估計函數 $f(x)$ 在參考點 a 附近的數值。當「x 在 a 的附近」，亦即 $x\approx a$ ，意思就是說 $|x-a|$ 是一個頗小的數，我們規定它至少滿足 $|x-a|<1$。所以當次方 k 越來越大，其實

$$\left|(x-a)^k\right|$$

卻是越來越小，越來越不重要。所以當 $x\approx a$ ，我們不妨將升冪排列的泰勒形式

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n$$

視為一個小數：c_0 是整數部分，c_1 是小數點下第一位，c_2 是小數點下第二位，c_3 是小數點下第三位，…；$(x-a)$ 的次方看起來是越來越大，但它代表的數其實是越來越小。就像小數點下越來越遠的位數，在估計的時候，它們越來越不重要。現在，我們知道泰勒多項式為什麼都習慣升冪排列了：因為我們要把泰勒形式想像成一個小數，視情況可以刪去後面很小的項。