導數基本公式

單維彰・2012 年 10 月

按照數學「以簡馭繁」的精神，讓我們先考慮單項函數 $f(x)=x^n$ 的情況。依據前一節所知求 c_1 的程序，做 $f'(a)$ 的第一步就是求 $f(x)\div(x-a)$ 的商式。讓我們觀察 $n=2$、3、4 的狀況：

$$\begin{array}{rl}
 & x+a \\ \hline
x-a\ ) & x^2+0+0 \\
 & x^2-ax \\ \hline
 & ax+0 \\
 & ax-a^2 \\ \hline
 & a^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+ax+a^2 \\ \hline
x-a\ ) & x^3+0+0+0 \\
 & x^3-ax^2 \\ \hline
 & ax^2+0 \\
 & ax^2-a^2x \\ \hline
 & a^2x+0 \\
 & a^2x-a^3 \\ \hline
 & a^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & x^3+ax^2+a^2x+a^3 \\ \hline
x-a\ ) & x^4+0+0+0+0 \\
 & x^4-ax^3 \\ \hline
 & ax^3+0 \\
 & ax^3-a^2x^2
\end{array}$$

$$a^2x^2+0$$

$$a^2\,x^2-\ a^3$$

$$a^3x+0$$

$$a^3x-a^4$$

$$a^4$$

觀察以上趨勢，很容易歸納一條公式：

$$f(x)\div(x-a)\text{的商是}q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1}\text{ ，}$$

求c_1，也就是$f'(a)$，的第二步就是計算$q(a)$。注意$q(a)$就是 n 個a^{n-1}相加，所以得到我們的**基本公式**：

$$\text{當 } f(x)=x^n\text{時， } f'(a)=n\,a^{n-1}\text{，其中 } n=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

注意，之前我們只討論了$n\geq 2$的狀況。當$n=1$時，$f(x)=x$以 a 為參考點的泰勒形式就是$a+(x-a)$，所以$c_1 = f'(a)=1$，而公式得到$1\cdot a^0=1$，所以公式成立。

這個公式也未免太簡單了，似乎沒什麼大用。別急，我們先做一些初步的練習，稍後配合兩個運算性質，就會威力無窮了。