一次估計示例：複利規則

單維彰・2014 年 4 月

我們已經知道，如果函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的切線方程式是 $y=mx+b$，而切線是一條通過點 $(a, f(a))$ 的直線。當 $x \approx a$ 的時候，函數圖形就像切線，所以函數值就跟切線上面的 y 坐標很接近。所以，我們把切線方程式 $y=mx+b$ 改寫成一次函數 $L(x)=mx+b$，代入 x 計算 $L(x)$ 得到 $f(x)$ 的近似值。我們說一次函數 $L(x)$ 是 f 在 a 的**一次估計**。記作 $f(x) \approx mx+b$，注意，這個近似觀念只有當 $x \approx a$ 的時候才成立。

本節要以存款或投資的複利規則為例，指出一個金融業應用「一次估計」的例子。以存款為例，若年利率是 3%，存入 10000 元，稱為本金，一年後獲得的利息是 $10000 \times 3\% = 300$ 元，加上原來的本金一萬元，稱為本利和，也就是 $10000 + 10000 \times 3\% = 10000 \times 1.03 = 10,300$ 元。

一般而言，如果本金是 P 元，年利率是 r，當然 P 和 r 都是正數，則一年後的本利和是 $P \cdot (1+r)$。

為了吸引客戶來存款，大部分的金融機構都不會每年算一次利息，而會多算幾次。例如郵局每年計息兩次（每半年一次），銀行大多每年計息 12 次（每個月一次）。

如果每年計息 2 次，假設這一年內的本金都不變，而且用複利計算，但是規定半年的利率是 x，則半年後的本金變成了 $P \cdot (1+x)$（就是半年的本利和），一年後就是

$$\left[P \cdot (1+x)\right] \cdot (1+x) = P \cdot (1+x)^2$$

所以，半年的利率 x 該是多少，才能使得一年後的相當於利率是 r 的本利和呢？要解這個問題，我們的方程式就是 $P \cdot (1+x)^2 = P \cdot (1+r)$ 發現可以消掉 P，可見這個問題跟原來的本金 P 沒有關係，就是要解

$$(1+x)^2 = 1+r$$

同理，如果每年計息 12 次，也就是每個月一次，而規定月利率是 x，假設固定本金 P。那麼，一個月後的本利和是 $P \cdot (1+x)$，用複利規則，把這個本利和當作本金繼續生利息，二個月後得到 $\left[P \cdot (1+x)\right] \cdot (1+x) = P \cdot (1+x)^2$，三個月後就是 $\left[P \cdot (1+x)^2\right] \cdot (1+x) = P \cdot (1+x)^3$。依此類推，第十二個月後的本利和就是 $P \cdot (1+x)^{12}$。

同樣的道理，如果要問月利率 x 該是多少，才能使得一年後的年利率等於 r 呢？要解這個問題，就是要解方程式 $P \cdot (1+x)^{12} = P \cdot (1+r)$。同樣地，可以消去等

號兩側的本金 P，這個問題跟 P 無關，只要求解 $(1+x)^{12}=1+r$ 就好了。

一般而言，如果每年計息 k 次，其中 k 是正整數，求每次利率 x 使得一年後的年利率是 r 的方程式就是

$$(1+x)^k=1+r$$

用指數律，我們可以說 $1+x=\sqrt[k]{1+r}$ ，也就是 $x=\sqrt[k]{1+r}-1$ 。

但是金融業並不想要這樣做，因為很難算而且很難跟客戶說明白。他們利用函數 $f(x)=(1+x)^k$ 的一次估計來求解。

實務上，我們都知道 x 是一個頗小的正數，也就是 $x\approx 0$ 。我們先算 $f(x)=(1+x)^k$ 在 0 的切線。因為 $f'(x)=k(1+x)^{k-1}$ ，所以 f 在 0 的切線斜率是 $f'(0)=k$ 。而切線通過點 $(0,f(0))=(0,1)$ ，所以用點斜式寫出切線方程式為

$$y=k(x-0)+1=kx+1$$

所以，函數 $f(x)=(1+x)^k$ 在 0 的一次估計就是 $(1+x)^k\approx kx+1$，別忘了有個條件，就是要 $x\approx 0$ 。

用 $(1+x)^k$ 的一次估計 $kx+1$ 來代替它，我們的複利方程式就變得超好解了。原來的方程式 $(1+x)^k=1+r$ 它改成近似的 $kx+1=1+r$ ，把 1 移項扣掉，就得到

$$x=\frac{r}{k}$$

這就是金融界的作法：如果年利率是 r，每年計息 k 次，則每次的利率就規定為 $\frac{r}{k}$ 。所以存款一年之後的本利和就是 $P\cdot(1+\frac{r}{k})^k$ 。例如郵局每半年計息一次，半年利率就是 $\frac{r}{2}$ ；銀行每個月計息一次，月利率就是 $\frac{r}{12}$ 。

事實上，$(1+x)^k$ 在 0 的一次估計 $1+kx$ 對於非正整數的指數 k 也都成立。例如 $k=\frac{1}{2}$ 也對，就是

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x \text{ 。}$$

再如 $k=-\frac{1}{2}$ 也可以，也就是

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{1}{2}x \text{ 。}$$

同學們在物理課或許已經用過這種估計，譬如高中物理的單擺。