高階導數

單維彰・2012 年 10 月

我們再介紹一個推廣的觀念：高階導函數或導數。將函數做一次微分所得的導函數，稱為**一階導函數**，代入某數之後就稱為**一階導數**。將一階導函數再微分一次，或者對原來的函數做兩次微分，所得的函數就稱為**二階導函數**；而代入數值之後就是**二階導數**。依此類推，做三次微分就得到三階導函數。高階的意思就是二階以上，二階、三階、四階⋯等。

舉例說明，令 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，則 $f'(x)=3x^2+2x+1$。那麼，對 $f(x)$ 做兩次微分就是對 $f'(x)$ 做微分的意思，此微分的結果記作 $f''(x)$：

$$f''(x)=[f'(x)]'=(3x^2+2x+1)'=6x+2$$

同理，對 $f(x)$ 做三次微分就是對 $f''(x)$ 做微分的意思，此微分的結果記作 $f'''(x)$：

$$f'''(x)=[6x+2]'=6$$

$f(x)$ 符號上方的兩撇讀作「double prime」，三撇讀作「triple prime」。

三階以上的導函數就不會再用「撇」來表示了，直接寫上階數，例如，承前例

$$f^{(4)}(x)=[f'''(x)]'=[6]'=0$$

依此類推，對令 $f(x)=x^3+x^2+x+1$ 而言，$f^{(5)}(x)=[f^{(4)}(x)]'=[0]'=0$，而 $f^{(6)}(x)$、$f^{(7)}(x)$、$f^{(8)}(x)$、$\ldots$ 全都是 0。

從以上經驗得知，如果 $f(x)$ 是 n 次多項式函數，則當 $1\le k\le n$ 時，它的 k 階導函數是 $n-k$ 次多項式；當 $k>n$，$f^{(k)}(x)=0$。此後，我們也說 $f(x)$ 本身是 **0 階導函數**，記作 $f^{(0)}(x)=f(x)$。此外，$f^{(1)}(x)=f'(x)$，$f^{(2)}(x)=f''(x)$，$f^{(3)}(x)=f'''(x)$。

學習高階導數的目的並不是要做無聊的計算，它可以用來推導泰勒形式裡每一項係數 c_1、c_2、c_3、c_4、$\ldots$。且看下回分解。