三次多項式函數的圖形

單維彰・2012 年 10 月

在實務上較少出現三次以上的多項式函數，而且它們的圖形特徵都可以由低次函數推論，所以我們只建議同學們熟悉零次、一次、二次和三次多項式函數的圖形特徵。其中三次以下的函數圖形都已經完整學習過，現在要處理三次函數。

我們知道三次函數 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 $a_3\neq 0$，必定可以經過配三方的程序改寫成以下形式：

(★) $$f(x)=a(x-h)^3+q(x-h)+k$$

也就是二次項消失的泰勒形式，其中 $a=a_3$、$q=f'(h)$、$k=f(h)$、$h=\dfrac{a_2}{-3a_3}$。因此 f 的圖形就是奇函數 $y=ax^3+qx$ 之圖形向右平 h、向上平移 k 的結果。而 $y=ax^3+qx$ 對稱於原點，平移之後，原點變成了點 (h,k)，函數 $f(x)$ 的圖形對稱於 (h,k)，可見三次多項式函數的圖形必有一個，且僅有一個，對稱點。

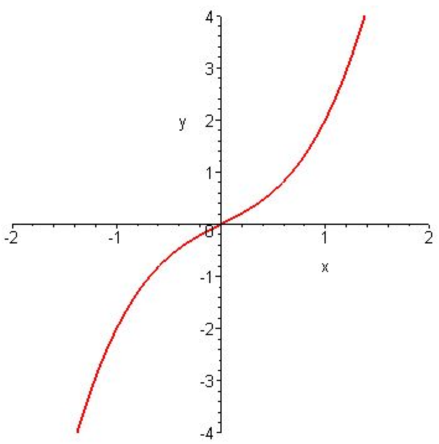
事實上，如果利用高階導函數，則不須要配方，用微分就可以求解 h：因為 $f(x)$ 以 $x=h$ 為參考點的泰勒多項式二次項係數為 $c_2=\dfrac{1}{2}f''(h)$，而

$$f''(x)=6a_3x+2a_2$$

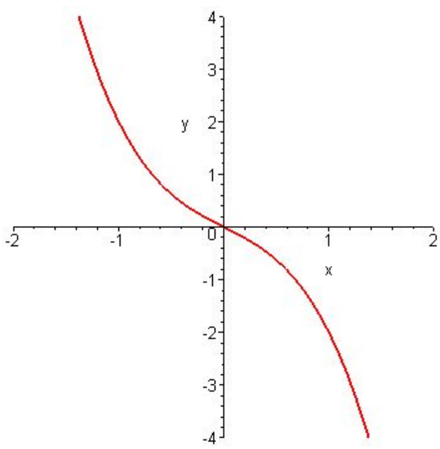
所以當 $h=\dfrac{a_2}{-3a_3}$ 時，$f''(h)=0$，也就是 $c_2=0$。因此，$f(x)$ 以 $x=h$ 為參考點的泰勒多項式就缺了二次項，就如以上 (★) 的形式。

我們現在只需要討論 $y=ax^3+qx$ 的圖形特徵即可。如果 a 和 q 同號，則 $y'=3ax^2+q$ 恆正或者恆負（與 a 和 q 的正負性相同），其圖形單調的：永遠遞增，或者永遠遞減；例如 $y=x^3+x$ 永遠遞增（以下左圖）而 $y=-x^3-x$ 永遠遞減（以下右圖）。

[如果 a 和 q 皆正，例如 $y=x^3+x$]

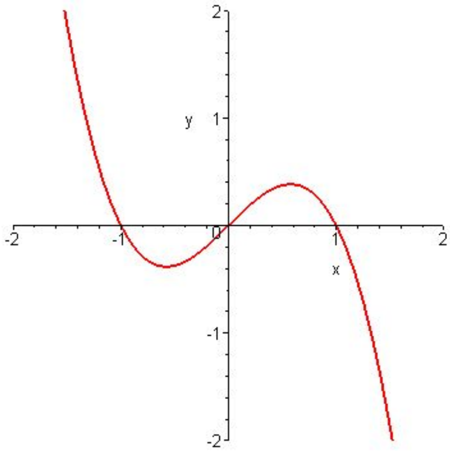


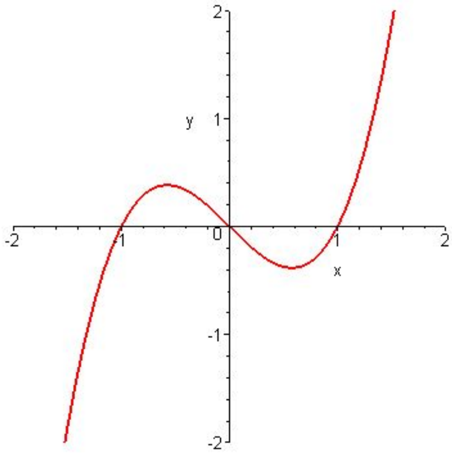
[如果 a 和 q 皆負，例如 $y=-x^3-x$]



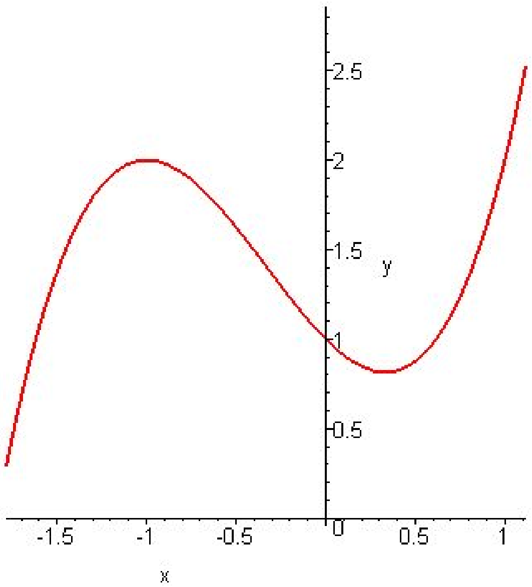
如果 a 和 q 異號，則 $y'=3ax^2+q=0$ 有兩個實根，而 $y=ax^3+qx$ 有一對極值：一個極大值和一個極小值（別忘了圖形對稱於原點，有一個極大值就必定有一個極小值）。如果 $q>0$ 則函數在原點附近遞增，所以極大值一定發生在右半平面，圖形類似 $y=-x^3+x$（以下左圖）。而若 $q<0$ 則函數在原點附近遞減，所以極大值一定發生在左半平面，圖形類似 $y=x^3-x$（以下右圖）。

[a 和 q 異號且 $q>0$，例如 $y=-x^3+x$]　　[a 和 q 異號且 $q<0$，例如 $y=x^3-x$]

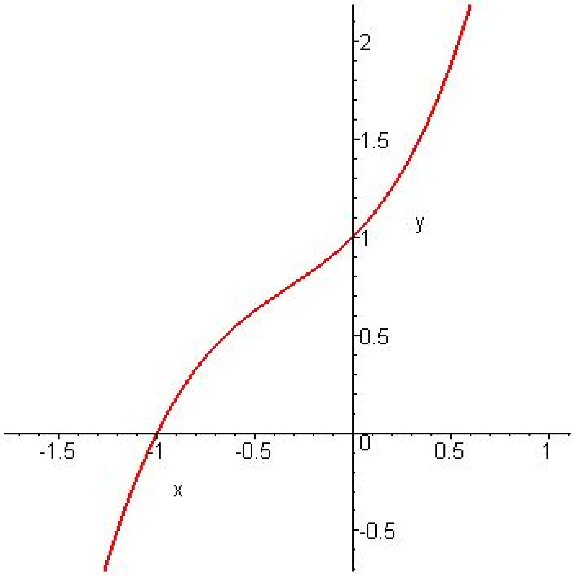




若要進一步知道極值的位置，則須求解 $y'=3ax^2+q=0$。雖然精確繪圖的工作交給電腦即可，我們要學習大略明白函數圖形的特徵。舉例而言，考慮 $f(x)=x^3+x^2-x+1$，求解 $f''(x)=6x+2=0$ 或者代配三方公式，得到 $h=-\dfrac{1}{3}$，而 $k=f(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{38}{27}$，所以 f 的函數圖形對稱於點 $(h,k)=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{38}{27}\right)$。而 $q=f'(-\dfrac{1}{3})<0$ 可見 a 和 q 異號，有一對極值。因為函數在對稱點附近遞減，所以極小值發生在右邊，極大值出現左邊，其圖形如以下。



再例如 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，求解 $f''(x)=6x+2=0$ 同樣得到 $a=-\frac{1}{3}$，而 $k=f(-\frac{1}{3})=\frac{20}{27}$，所以 f 的圖形對稱於點 $\left(-\frac{1}{3},\frac{20}{27}\right)$。而 $q=f'(-\frac{1}{3})>0$ 可見 a 和 q 異號同號且為正，這時 f 沒有極值而且遞增，其圖形如下。



綜合以上所知，利用係數判斷三次函數 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 圖形特徵的程序如下。

第一步：令 $h=-\frac{a_2}{3a_3}$，$k=f(h)$，得知對稱點的位置 (h,k)。

第二步：計算 $q=f'(h)$，檢查 a_3 和 q 是否同號：「是」無極值，「否」有極值。

第三步：根據 q 的正負性決定圖形特徵：若無極值，函數永遠遞增或遞減；若有極值，極大值在對稱點左側或右側。