導數的單位與速度意涵

單維彰・2013 年 3 月

萊布尼茲符號的另一項好處，是自然地展現導數的單位 (unit)。因為導數是一種分式 $\frac{dy}{dx}$，而即使是「一滴滴」的 dx 和 dy，它們的單位卻還是 x 和 y 的單位；就好像 0.00001 公尺雖然是很短的長度，但它的單位畢竟是公尺。由此可見：

導數的單位

函數 $y=f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 單位是 $\dfrac{y\text{的單位}}{x\text{的單位}}$。

最傳統的範例是：x 表示運動的時間，單位為小時 (hr)，y 表示運動的距離（位移），單位為公里 (km)，而函數 $y=f(x)$ 表示某物（相對於某個固定的參考點）在 x 時刻的與參考點的距離，則其導數 $f'(x)$ 的單位就是 $\dfrac{\text{公里}}{\text{小時}}$，簡記為 km/hr，讀作「每小時公里」，也就是時速的意思。

於是我們知道：如果 x 表示時間，$y=f(x)$ 表示位移，則從 $f'(x)$ 的單位來看，就很清楚它的意義就是速度。這是微分的一個最古早的意涵（從牛頓開始），而且將會跟稍後學習積分有關，所以我們先介紹這個意涵。

讓我們先了解所謂的**直線運動**。像「自由落體」，也就是直直地往下掉落的那種運動，因為運動的軌跡是直線，所以稱為直線運動。但是不僅如此。只要某物在任一時刻 x 的位置 y 可以對應數線上的一個點，就是直線運動。

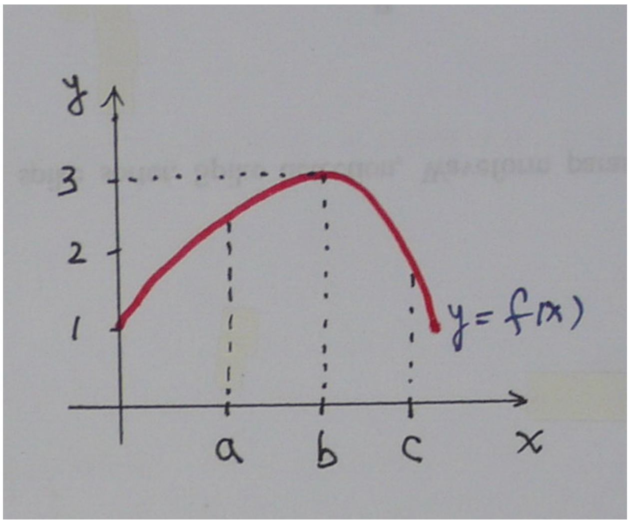
以自由落體為例，通常我們從物體開始掉落的那一瞬開始計時，而從地面測量它的高度。在掉落的那段時間內，物體的高度 y 是一個實數（選定測量單位之後），所以它對應數線上的一個點，這就是直線運動。而且，物體在每一瞬 x 的高度 y 顯然隨 x 改變，所以 y 是 x 的函數 $y=f(x)$。

再以騎機車為例。假設我們在省道或縣道上騎車，則道路有公定的里程碑，所以，按照里程碑來看，道路就像一條數線。選定機車上某個部位代表機車所在的位置（例如前輪接地面的前緣），則理論上可以測量機車在公路上的里程位置。所以，當我們在省道或縣道上騎車，即使公路蜿蜒起伏，但是我們卻在做直線運動。而且，從出發的時刻開始計時，機車所在的里程位置 y（單位公里）顯然隨著時間 x（單位時）改變，所以 y 是 x 的函數 $y=f(x)$。

按照騎機車的意義，我們明白常數函數 y=3 的意思是，不論時間 x 如何，機車都一直在里程碑 3 公里的位置。意思就是「靜止不動」，屬於停車狀態。而一次函數 $y=40x+7$ 表示我們從里程 7 公里處開始計時，而因為 $y'=40$ 所以是用每小時 40 公里的等速度，向里程增加的方向騎車。

但是，騎機車的人很少停著不動或者完全騎在固定的速度上。在大部分的騎車過程中，時速快快慢慢地變化。如果我們可以把速率表上的數據全部紀錄下來，則速率也是時間的函數$|y'|=|f'(x)|$。回顧速率是速度的絕對值，如果朝著里程增加的方向騎車（例如在 1, 3, 5, …號省道上，里程數朝南增加）則速度為正，反則速度為負。根據速率表，我們很容易紀錄汽機車（甚至飛機輪船）的速度，卻很難隨時檢查我們在道路里程的什麼位置。由此可見，有時候速度隨時間變化的函數$y'=f'(x)$其實比運動的位置變化$y=f(x)$更容易測量。

如果以下函數圖形是直線運動$y=f(x)$的位置y與時間x的關係：



則我們可以做以下的詮釋：

- $f(0)=1$，所以此運動是從$y=1$處出發的。
- 在$0<x<b$時間內，函數遞增，表示運動「向前」；當$x>b$就轉為向後了。
- 觀察圖形當$x=a$的切線斜率為正，當$x=c$的切線斜率為負，亦即$f'(a)>0$函數遞增，$f'(c)<0$函數遞減。
- 當$x=b$時，函數發生極大值，所以$f'(b)=0$，那一瞬的速度為 0（正在迴轉掉頭，所在的位置既沒有增加也沒有減少）。
- $f(b)=3$，此運動最「遠」走到$y=3$處。
- 觀察圖形當$x=c$的切線比當$x=a$的切線「陡」，亦即$|f'(a)|<|f'(c)|$，表示$x=c$的運動的速率（車速）比$x=a$時快。