相關變化率

單維彰・2013 年 3 月

我們介紹萊布尼茲符號的另一種應用：它使得微分變得可以像分數一樣做運算。我們知道分數具備如$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$的運算規則，亦即同時出現在分子和分母的（非零）量是可以消去的。因此，可以反過來做「擴分」運算，例如$\frac{b}{a}=\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}$，亦即在分子和分母同時乘以某個非零的數 c。萊布尼茲符號也可以用同樣的規律處理「一滴滴」的微量，如下。

萊布尼茲符號的擴分

如果 y 隨著 x 改變而有函數關係 $y=f(x)$，而同時 x 和 y 也都隨著時間 t 而改變，則$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$，其中$\frac{dx}{dt}$和$\frac{dy}{dt}$分別表示 x 和 y 隨時間改變的速度。

我們已經知道$\frac{d}{dx}$表示「對 x 微分」的動作。例如若 $y=x^3-x+1$，則$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[x^3-x+1]=3x^2-1$。同理，$\frac{d}{dt}$表示「對 t 微分」，其中 t 表示某種參數，其實通常就是時間的意思。我們可以在等式 $y=x^3-x+1$ 兩側同時乘以$\frac{d}{dt}$，也就是同時將等號兩側的量對 t 微分：

$$\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}[x^3-x+1]$$

等號的左邊直接寫成$\frac{dy}{dt}$，也就是 y 的變化速度，而右邊就可以運用萊布尼茲擴分寫成

$$\frac{d}{dt}[x^3-x+1]=\frac{d}{dx}[x^3-x+1]\cdot\frac{dx}{dt}=[3x^2-1]\cdot\frac{dx}{dt}\ ,$$

也就是在分子和分母同乘以 x 的微量 dx。

如果 x 與 t 無關，也就是 x 不隨時間改變，則$\frac{dx}{dt}=0$，因此也得到$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot 0=0$。但是，有時候 x 確實隨著時間改變，則$\frac{dx}{dt}\neq 0$，那就可以透過導數相乘$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$而得到 y 也隨著時間改變的速度$\frac{dy}{dt}$。

一般而言，如果 x 隨著時間改變，則因為 y 透過函數 $f(x)$ 而和 x 有關，則 y

也會隨著時間改變。這類問題通稱為**相關變化率** (related rates)。

舉例而言，假設某商品的利潤 P 與銷售量 x 之關係的數學模型為 $P = 500x - \frac{x^2}{4}$。因為廣告和口碑的作用，假設該商品每天可以多賣 10 個，若問當銷售量達到 500 的那天，利潤的變化率是每天多少錢？就是一個相關變化率的問題，而不是邊際利潤的問題。注意 $\frac{dP}{dx}$ 才是邊際利潤（單位：每個幾元），而以上問題是求 $\frac{dP}{dt}$，單位是「每天幾元」。