

自由落體

單維彰 · 2013 年 4 月

自由落體是一個等加速運動，也就是說物體的速度與下落的時間成正比。令 $x = x(t)$ 表示物體下落 t 秒後的高度（公尺），而已知下落 t 秒後的速度是 $-9.8t$ 。假設物體從高度 1000 公尺處落下，試問 t 秒時的高度、10 秒後的高度、經過幾秒落地。

速度就是高度對時間的變化率 $\frac{dx}{dt}$ 。因此由題目得知 $dx = -9.8t dt$ ，其中負號表示運動的方向向下。我們用積分得到

$$x = \int -9.8t dt = -4.9t^2 + C。$$

因為它從 1000 公尺處落下，所以 $x(0) = 1000$ ，可見 $C = 1000$ 。因此，高度對時間的函數為 $x = -4.9t^2 + 1000$ 。下落 10 秒後的高度是 $x(10) = 1000 - 490 = 510$ 公尺。假設物體在 T 秒後落地，則要解 $x(T) = 0$ ，亦即 $-4.9T^2 + 1000 = 0$ ，所以 $T^2 = \frac{1000}{4.9} \cong 204$ ，故得 $T = \sqrt{204} \cong 14.3$ ；大約 14.3 秒落地。