微積分基本定理

單維彰・2013 年 4 月

積分有兩種：不定積分和定積分。不定積分 $\int f(x)dx$ 的積分符號旁沒有寫數，做出來一個函數。定積分的符號形式是 $\int_a^b f(x)\,dx$，讀作「 $f(x)$ 對 x 從 a 到 b 的積分」，做出來一個數。它的意義是，對每一個介於 a 與 b 之間的數 x 做出函數值與微量的乘積 $f(x)\cdot dx$，把所有這些（無窮多個）量加起來，得到一個「總數」。

回顧自由落體問題。若已知 $f(x)=\dfrac{dy}{dx}$ 是當時間為 x 時下落的速度，而 $y=F(x)$ 是時間為 x 時的高度。則 $F'(x)=\dfrac{dy}{dx}=f(x)$，可見 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數。在此意義之下，$f(x)\cdot dx$ 是當時的速度乘以一滴滴的時間，也就是一滴滴的位移（下落的一滴滴距離）。把所有時間從 a 到 b 的（無窮多個）一滴滴位移全部加起來，就應該是總位移：此落體運動從時間 a 到時間 b 的位移。顯然，它就是物體在時間 b 的位置減掉它在時間 a 的位置，亦即 $F(b)-F(a)$。牛頓從以上特例，獲得一般性的結論，稱為

微積分基本定理

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

其中 $f(x)$ 是一個連續函數，其定義域包含閉區間 $[a, b]$，而 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的（任意）一個反導函數。

因為 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數，亦即 $F'(x)=f(x)$，所以 f 是 F 的變化率，而 $f(x)\cdot dx$ 就是一滴滴的 $F(x)$，至於 $\int_a^b$ 就是把這些在 $a\le x\le b$ 範圍內一滴滴的量全部加起來的意思。它本來是個很困難的計算，要把無窮多個微小的量全部加起來，但是微積分基本定理把它變簡單了：只要找到一個反導函數，把頭尾兩個數代進去求值，然後相減即可。這就是微積分之所以成為「超級」計算方法的關鍵因素啊！