導函數公式的推廣

單維彰・2013 年 4 月

給一個多項式函數，它在 $x=a$ 這一點的導數寫成了極限定義，如下式：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

事實上，極限有一個比較基本的觀點，就是要算出這個分式在 a 的函數值，我們只要設法將分母約掉，然後再把 $x=a$ 代入即可。例如：f 是一個 n 次多項式函數，則 $f(x)-f(a)$ 一定會被 $x-a$ 整除，而商為一個 $n-1$ 次的多項式函數，然後再把 $x=a$ 代入多項式函數裡面，相當於我們就完成了在分式裡求 x 在 a 之函數值的工作。

簡單複習一下導函數，給一個 n 次多項式函數，利用基本公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 搭配線性性質，我們可以求得任意 n 次多項式函數的 $n-1$ 次導函數，然後在導函數裡代入欲求的點，即可算出其函數值。

令 $h=x-a$ ，我們可將 $f'(a)$ 改寫為

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

a 原本是一個實數，而每一個 a 都可以算出一導數，我們將式子中的 a 皆換成 x 的話，則我們就寫出導函數的定義了，如下式。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

給一個多項式函數 $f(x)=x^n$ ，根據導函數的定數，我們可寫出

$$\begin{aligned}(x^n)'&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nhx^{n-1}+\dots\dots+h^n)-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\binom{n}{2}hx^{n-2}+\dots\dots+h^{n-1})\\&=nx^{n-1}\end{aligned}$$

再給另一多項式函數 $f(x)=\sqrt{x}$ ，$x\geq 0$ ，根據導函數的定數，我們可寫出

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x})' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

所以我們得到結果$[\sqrt{x}]' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。

從上述兩個例子中，我們將會發現： $(x^n)'=nx^{n-1}$ 這個公式對所有的實數 n ，都是成立的。