指數與對數的積分

單維彰・2014 年 4 月

標準指數的積分公式很單純，就是從連鎖律的微分公式倒轉過來：

$$\int u'e^u dx = e^u + C$$

特殊的例子是一般指數函數 a^x 的積分，其中 $0 < a \neq 1$：

$$\int a^x dx = \int e^{\ln a \cdot x} dx$$

令 $u = \ln a \cdot x$，則 $u' = \ln a$，所以

$$\int e^{\ln a \cdot x} dx = \frac{1}{\ln a}\int u' e^u dx = \frac{1}{\ln a} e^{\ln a \cdot x} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{，}$$

所以得到一般的積分公式

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{，其中 } 0 < a \neq 1 \text{。}$$

我們也可以從指數的微分公式 $[a^x]' = \ln a \cdot a^x$ 倒推積分公式。因為

$$\left[\frac{a^x}{\ln a}\right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot \left[\ln a \cdot a^x\right] = a^x \text{，}$$

所以 $\dfrac{a^x}{\ln a}$ 是 a^x 的一個反導函數，所以得到積分公式

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{，其中 } 0 < a \neq 1 \text{。}$$

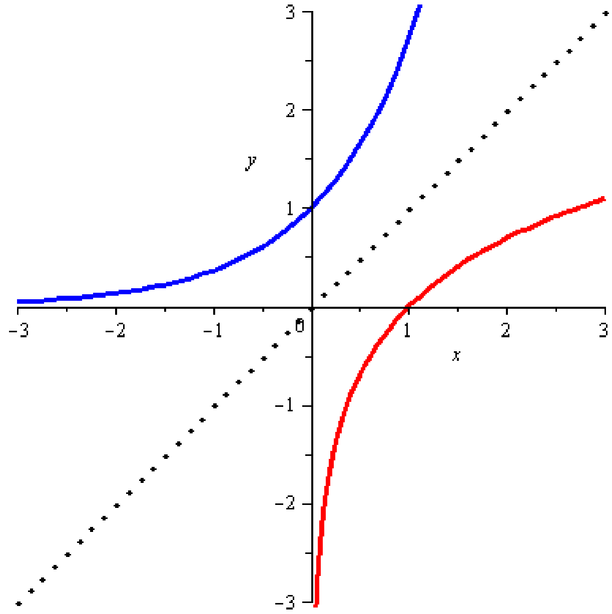
例如（令 $u = 2x$，則 $u' = 2$）

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int y'e^u dx = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

或者（令 $u = -x^2$，則 $u' = -2x$）

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int u'e^u dx = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

現在接著討論$\ln x$的積分公式。我們要利用自然對數的圖形和標準指數對稱的事實。參照下圖，藍色的曲線是$y=e^x$的圖形，紅色的是$y=\ln x$的圖形，它們對稱於$y=x$直線。



取$a>1$，則由圖形的對稱性可知：$x\in[1,a]$ 之間$\ln x$曲線下面積，等於水平線 $y=a$ 和曲線 $y=e^x$ 之間的面積，而這塊面積落在 $x\in[0,\ln a]$ 範圍內。也就是

$$\int_1^a \ln x\ dx = a\cdot\ln a - \int_0^{\ln a} e^x\,dx = a\ln a - a + 1 \text{ 。}$$

現在，觀察

$$\int_1^a \ln x\ dx = F(a)-F(1) \text{ ，}$$

其中 $F(x)=x\ln x - x$ ，這就好像$F(x)$是$\ln x$的一個反導函數。檢查一下，果然如此：

$$F'(x)=[x\cdot\ln x]'-[x]'=[x]'[\ln x]+x\cdot[\ln x]'-1=\ln x + x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$$

因此，我們得知$\ln x$的積分公式如下；

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

至於常用對數$\log x$的積分，只要先把它置換成$\log x=\dfrac{1}{\ln 10}\ln x$就可以了。有

些書會討論以 a 為底的一般對數，我們完全不討論這個東西。如果看到 $\log_a x$ 這種符號，只要置換成 $\log_a x = \dfrac{1}{\ln a}\ln x$ 就行了。