斜漸近線

單維彰・2014 年 12 月

只有「有理函數」才可能有斜漸近線，所以這一節的標題就不寫限定名詞「有理函數」了。關於有理函數$\dfrac{多項式}{多項式}$在無窮遠處的極限，我們已經知道

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{高次}{低次}=\infty \text{ 或 } -\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{低次}{高次}=0$$

分子比分母高次的分式，稱為假分式，就好像分子比分母大的分數，稱為假分數。換句話說

$$\lim_{x\to\pm\infty}假分式=\pm\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}真分式=0$$

本節特別要討論分子比分母高一次的假分式，記作$\dfrac{n+1次}{n次}$。我們可以做除法，把假分數改寫成帶分數，例如 7/3 是個假分數，因為$7\div 3=2\ldots 1$，所以$\dfrac{7}{3}=2+\dfrac{1}{3}=2\dfrac{1}{3}$。假分式也可以這樣做。假如 P/S 是一個假分式，如果做多項式除法$P\div S=Q\ldots R$，那它就可以寫成多項式 Q 加上真分式 R/S，亦即

$$\frac{P}{S}=Q+\frac{R}{S}\text{ 。}$$

如果有理函數$f(x)=\dfrac{P}{S}$是一個假分式，而它可以改寫成

$$f(x)=\frac{P}{S}=Q+\frac{R}{S}$$

注意$f(x)-Q=\dfrac{R}{S}$，因此它在無窮遠處的極限是

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-Q\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{R}{S}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{低次}{高次}=0\text{ 。}$$

所以在無窮遠處，$y=f(x)$的圖形和$y=Q$的圖形會越來越靠近，或者說

$$當\ |x|>>1\text{，}\ f(x)\approx Q\text{ 。}$$

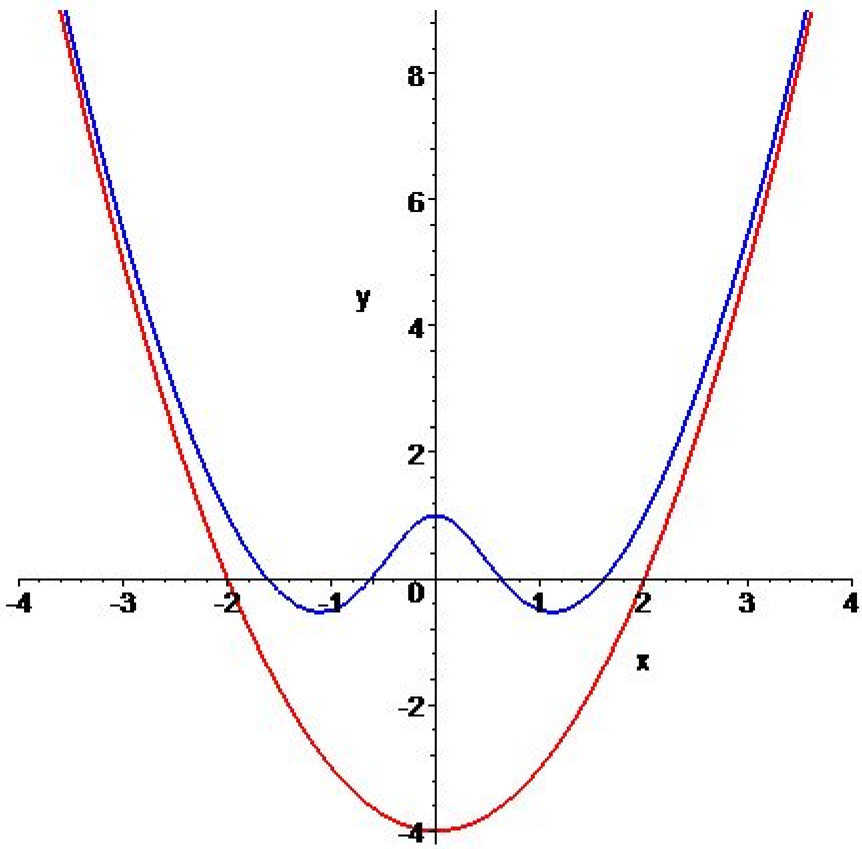
舉一個例子，令$f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2+1}$，計算多項式除法得到

$$\left(x^4-3x^2+1\right)\div\left(x^2+1\right)=\left(x^2-4\right)\ldots5$$

所以

$$f(x)=\frac{x^4-3x^2+1}{x^2+1}=x^2-4+\frac{5}{x^2+1}$$

其中$Q=x^2-4$。以下圖形中，藍色曲線是$y=f(x)$的圖形，紅色曲線是$y=Q$的圖形(開口向上的拋物線),觀察當 $|x|$ 足夠大的時候，$f(x)$很靠近那條拋物線。

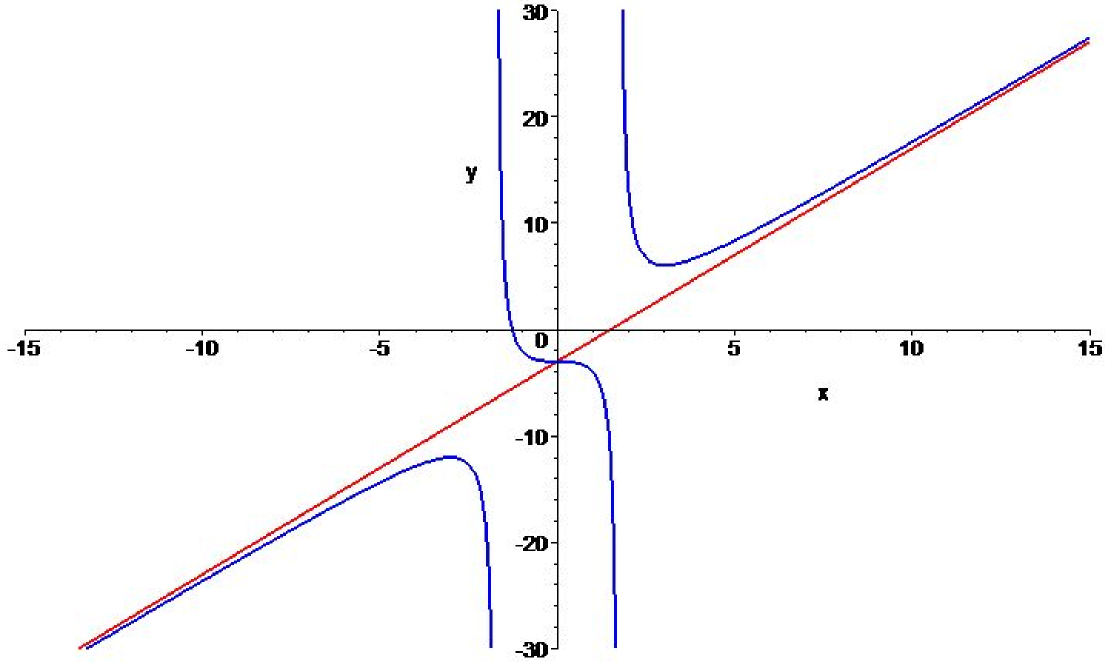


特別當有理函數是$\dfrac{n+1次}{n次}$情況時，$Q=mx+k$ ，Q的圖形是一條斜率為m的直線，而當 $|x|$ 足夠大的時候，$f(x)$很靠近那條直線，後者就是$f(x)$的**斜漸近線**。舉一個例子，令$f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+9}{x^2-3}$，做除法得到商式$Q=2x-3$而餘式為$6x$，故

$$f(x)=\frac{2x^3-3x^2+9}{x^2-3}=2x-3+\frac{6x}{x^2-3}$$

下圖的藍色曲線是$y=f(x)$的圖形，紅色直線是$y=Q$的圖形（斜率為 2 的直

線），觀察當 $|x|$ 足夠大的時候，$f(x)$很靠近那條直線，也就是是f的斜漸近線。



一般來說，如果 $f(x)=\dfrac{n+1\text{次}}{n\text{次}}$ ，則

$$f(x)=\left(mx+k\right)+\frac{\text{低次}}{n\text{次}}\text{，} m\neq 0$$

$y=mx+k$是$y=f(x)$的斜漸近線。