無窮大的運算

單維彰・2014 年 8 月

「無窮大」(infinity) 不是一個數，當然也不是實數，它代表「無盡上升」或者「無上界」的觀念，記作∞。以前我們用它來表示沒有上界的區間，例如$x \ge a$等同於$x \in [a, \infty)$，注意∞不是實數，所以任何實數x不可能等於∞，所以用∞當作區間邊界的時候，一定是開區間。

類似地，「負無窮大」也不是一個數，它代表「無盡下跌」或者「無下界」的觀念，記作$-\infty$。以前我們也用它來表示沒有下界的區間，例如$x \le a$等同於$x \in (-\infty, a]$，注意當$-\infty$作為區間邊界的時候，也一定是開區間。

根據以上的認識，任一個實數a當然必定落於$-\infty$和∞之間，記作

$$-\infty < a < \infty$$

認識∞或$-\infty$的意涵之後，我們可以首先了解第一條無窮大的運算規則。

(1) 對任意正數a，$\begin{cases} \infty \pm a = \infty \\ -\infty \pm a = -\infty \end{cases}$

注意每當我們說「對任意正數a」或者「任意數a」或者$a > 0$或者$a \le 0$這種話，意思就是說a是一個實數。以上規則的意義是：「無上界」再往右或者往左平移a單位，還是「無上界」。這應該是非常顯而易見的，這個規則也很容易達成大家的共識。

接著再提供一項共識：比無窮大更大的觀念，它一定也是「無上界」的，所以它本身就是無窮大。對「負無窮大」的觀念也相對成立，我們從此就只說關於「無窮大」的觀念，而不多說「負無窮大」了。從這一項共識，根據$\infty + a < \infty + \infty$而不等式的左邊已經是$\infty$，既然$\infty + \infty$比$\infty$還要大，它本身就是$\infty$。此推論集結成以下規則。

(2) $\infty + \infty = \infty$

特別提醒讀者，$\infty - \infty$不能輕易決定其值，稍後就解釋。

在集合論裡，數學家將∞分類，有比較大的∞和比較小的∞。但是在微積分領域裡，我們不討論∞的大小。以上規則也表示$2\infty = \infty$，其實可以擴充成以下規則。

(3) 對所有$a > 0$，$\begin{cases} \infty \cdot a = \infty \\ \infty \cdot (-a) = -\infty \end{cases}$

以上規則的意義是：「無上界」的任意a倍還是「無上界」，但如果乘上負號就映射到另一個方向去，成了「無下界」。再用$\infty \cdot a < \infty \cdot \infty$的觀點，得到以下規則。

(4) $\begin{cases} \infty \cdot \infty = \infty \\ \infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{cases}$

以上規則可以改寫成$\infty^2 = \infty$，當然可以推廣到所有的正次方$\infty^r = \infty$其中$r > 0$。但是我們慢點推廣，先討論另一個規則。從已知的基本事實

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

我們將以上極限等式簡記為新的規則：

(5) $\dfrac{1}{\infty} = 0$

對任意正數a，因為$\dfrac{\pm a}{\infty} = \pm a \cdot \left(\dfrac{1}{\infty} \right) = \pm a \cdot 0 = 0$，所以規則 (5) 有一個基本的推廣如下。

(5)′ 對所有$a \geq 0$， $\dfrac{\pm a}{\infty} = 0$

當$r > 0$而$\infty^{-r} = \dfrac{1}{\infty^r} = \dfrac{1}{\infty} = 0$，所以有以下的次方規則。

(6) 對所有$r > 0$，$\begin{cases} \infty^r = \infty \\ \infty^{-r} = 0 \end{cases}$

特別提醒讀者，無窮大的零次方∞^0不可以隨便決定其值，它沒有計算規則。在規則 (5) 的等式兩冊皆做倒數，就得到

(7) $\dfrac{1}{0} = \infty$

規則 (7) 的意義如下，式中我們設定$y = \dfrac{1}{x}$所以$y \to 0$等價於$x \to \infty$。

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{y} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

而因為$\dfrac{\pm a}{0} = \pm a \cdot \left(\dfrac{1}{0} \right) = \pm a \cdot \infty = \pm\infty$，所以規則 (7) 有個基本的推廣：

(7)′　對所有 $a>0$，$\dfrac{\pm a}{0}=\pm\infty$

特別提醒讀者，零分之零 $\dfrac{0}{0}$ 不可以隨便決定其值，它沒有計算規則。

前面探討了無窮大的非零次方，現在探討實數的無窮大次方。跟高中時代所學的一樣，除了整數指數以外，我們一律不討論負的底數。∞ 不是整數，所以沿用那個慣例，我們不討論負數的無窮大次方。首先考慮 $a>1$ 的情況，a^2、a^3、… 是個遞增的無窮等比數列，它顯然沒有上界，所以 $a^\infty=\infty$。而當 $0<a<1$，則 $b=\dfrac{1}{a}>1$，所以 $a^\infty=\left(\dfrac{1}{b}\right)^\infty=\dfrac{1}{b^\infty}=\dfrac{1}{\infty}=0$。而 0^∞ 就是 0 的自乘，結果還是 0。以上結果集結成以下規則。

(8)　對所有 $a\geq 0$，$\begin{cases} \text{當 } a>1,\ a^\infty=\infty \\ \text{當 } 0\leq a<1,\ a^\infty=0 \end{cases}$

特別提醒讀者，1 的無窮大次方 1^∞ 不可以隨便決定其值，它沒有計算規則。包括這個「特別提醒」在內，我們一共提出了四項「特別提醒」。這些「特別提醒」的情況，都沒有計算規則，它們的計算結果有各種可能，通稱為**不定形式**。

不定形式的值，有可能不存在，也有可能是任意實數。僅以 $\dfrac{0}{0}$ 之不定形式為例，它的意義是分子和分母同時趨近於 0 的極限問題。我們學習微積分的一個最基本知識就是函數 f 在 a 的導數（切線斜率）定義如下：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{0}{0}$$

導數就是一種 $\dfrac{0}{0}$ 形式的極限，而它的值有各種可能，並不一定；所以，我們稱 $\dfrac{0}{0}$ 形式的極限為「不定形式」。另外在專門討論它。