微分的係數積法則

單維彰・2012 年 10 月

令 $f(x)$ 是一個多項式函數，則**係數積性質**是說

$$[c\ f(x)]' = c\ f'(x)\text{ ，其中 } c \text{ 為任意實數。}$$

這是因為，回顧 $f'(a)$ 的原始意義為 $q(a)$ ，其中 $q(x)$ 是 $f(x) \div (x-a)$ 的商。因為 $f(x) \div (x-a) = q(x) \ldots f(a)$ 按照除法原理寫成等式 $f(x) - f(a) = q(x)(x-a)$，所以在兩側乘以 c 為

$$\left[c\ f(x)\right] - \left[c\ f(a)\right] = \left[c\ q(x)\right](x-a)$$

也就是說 $\left[c\ f(x)\right] \div (x-a)$ 的商就是 $c\,q(x)$ 。因此 $[c\ f(x)]$ 在 a 的導數就是 $c\,q(a) = c\ f'(a)$ 。此關係對任意參考點 a 都成立，故可以寫成導函數的關係。

係數積性質對任意多項式函數 $f(x)$ 皆成立，當然對單項函數 x^n 也成立。所以

$$[cx^n]' = c[x^n]'\text{ ，其中 } c \text{ 為任意實數。}$$

例如

$$[2x^3]' = 2[x^3]' = 2\left(3x^2\right) = 6x^2\text{ ，}[-x^2]' = -[x^2]' = -2x\text{ 。}$$