2 十進制小數

同學們可能都已經知道 $0.\overline{9}$（0.9 循環）等於 1。這一課的重點之一，是說明像 $0.\overline{9}$ 這樣的數是怎麼發生的？

前一課學到：數線上的有理點，由二分點、三分點、四分點 ... 組成。因為我們使用十進制作為正整數的計數系統，使得十、百、千、萬 ... 成為常用的量詞，所以對於非整數的有理數，也順理成章地賦予十分點、百分點、千分點、萬分點 ... 特殊的地位，而且給予它們特殊的記號。例如$2\dfrac{4}{10}$ 、$-3\dfrac{14}{100}$ 、$7\dfrac{12}{1000}$ 都有特殊的數字記號。讀者應該已經猜到了，那特殊記號就是**十進制小數**，簡稱為**小數**。例如$2\dfrac{4}{10}$ 記作 2.4，而$-3\dfrac{14}{100}$ 記作-3.14 ，$7\dfrac{12}{1000}$ 記作 7.012。

以下事實，同學們在小學就知道了，現在再確認一次：

（有限）小數只是特殊的分數：其分母為 10 的某 k 次方，其中 $k\in\mathbb{N}$ 。

一位小數，例如 0.5、2.4、-1.0 ，都對應十分點；二位小數，例如-1.25 、0.72、3.01，都對應百分點。同理，三位小數對應千分點，四位小數對應萬分點。因為十分點就是10^1 分點、百分點是10^2 分點、千分點是10^3 分點、萬分點是10^4 分點 ...，為了溝通方便，我們將所有10^k 分點通稱為「十次分點」，前述的 $k\in\mathbb{N}$ 。

十次分點的坐標是有限小數

我們已經知道，有理點的坐標就是有理數，也就是整數或分數。十次分點的坐標是以10^k 為分母的分數，所以它們都是有理數。但是反過來，並不是每個有理點都恰好是十次分點。例如同學們應該已經知道 $\dfrac{1}{3}$ 是三分點，不能寫成「有限」小數。

所謂「有限」小數就是一位、二位、三位 ... 小數，它們對應數線上的十分點、百分點、千分點 ...。依此類推，只有十次分點的坐標才會是有限小數。一般而言，令 $P(\dfrac{m}{10^k})$ 是原點右側的某個十次分點，其中 $m, k\in\mathbb{N}$。如果 m 與10^k 互質，則 P 點坐標就是 k 位小數；如果 m 與10^k 不互質（有公因數），則約分之後的小數位數就會少於 k 位，不論如何還是有限小數。約分只會減少分子、分母的質因數，不會增加質因數。而$10=2\times5$，所以10^k 也只有 2、5 兩種質因數。因為只有十次分點的坐標才會是有限小數，而十次分點的坐標即使經過約分，分母仍只有 2、5 兩種質因數，所以我們獲得一個結論，陳述如下。這種「在預設條件下絕對正確」的結論，稱為**數學定理**，簡稱**定理**（theorem）。

[定理] 可寫成有限小數的分數

將一個分數約至最簡之後，若它的分母只有 2、5 兩種質因數，它是一個十次分點的坐標，可寫成有限小數；若它的分母具有 2、5 以外的任一質因數，它就不是十次分點，不能寫成有限小數。

因為 $\dfrac{1}{3}$ 的分母具有 2、5 以外的質因數 3，所以 $A(\dfrac{1}{3})$不是十次分點，也就是說 $\dfrac{1}{3}$ 不能寫成「有限」小數。當然 $\dfrac{1}{3}$ 並不特殊，$\dfrac{1}{6}$ 的分母雖然有質因數 2，但因為也有質因數 3，所以也不

能寫成有限小數。同理 $\frac{1}{7}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{11}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{13}$、$\frac{1}{14}$、$\frac{1}{15}$、$\frac{1}{17}$、$\frac{1}{18}$、$\frac{1}{19}$ 都不能寫成有限小數。

[隨堂練習 1]

請將正整數 $n=20, 21, 22, ..., 40$ 之中，其倒數 $\frac{1}{n}$「能」寫成有限小數的，全部列舉出來：
______________________________________。

學到這裡，同學們認為有理數之中，能寫成有限小數的比較多？還是不能寫成有限小數的比較多呢？高中一年級的知識，應該還不足以完整地回答這個問題。但我們不妨用它來鍛鍊一下「主觀機率」。

[隨堂練習 2]

想像妳／你「隨機」抽選 10 個有理數，每個有理數被抽中的機會一樣多。則妳／你認為最可能抽中幾個「能」寫成有限小數的有理數？

① 9 個（含）以上　② 6 或 7 或 8 個　③ 5 個　④ 2 或 3 或 4 個　⑤ 1 個（含）以下

答：__________

實數的小數表達

讀到這裡，我們已經確定，數線上的點坐標，只有十次分點才是有限小數；所有其他點，不論是有理點還是無理點，都不能用有限小數來表達。例如 $A(\frac{1}{3})$ 和 $Q(\sqrt{2})$ 都不是十次分點，它們的坐標都不能寫成有限小數。不是有限小數，意思就是它不可能被任何有限多位的小數表達，即使 100 位或 1000 位也不可能。但是人們既不能算出也不能寫出無限多位的小數，那該怎麼辦呢？我們就用 $\cdots$ 來表達那無窮多位寫不出來的小數。例如 $\frac{1}{3}=0.33\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$。

但我們在這裡想要說清楚的是：什麼時候才真的可以寫「$=\square\cdots$」呢？例如為什麼 $\frac{1}{3}$ 不可以寫成 $=0.32\cdots$ 也不可以寫成 $=0.34\cdots$呢？這是因為，如果已知 x 不是十次分點的坐標（x 不是有限小數），$\bar{x}$ 是二位小數，[1] 則 $x=\bar{x}\cdots$ 的意思是：

$\bar{x}$ 是小於 x 的最大二位小數

所以 $\frac{1}{3}$ 不可以寫成 $=0.32\cdots$，因為 0.32 不是小於 $\frac{1}{3}$ 的最大二位小數，0.33 比 0.32 大，而且 $0.33<\frac{1}{3}$。而 $\frac{1}{3}$ 也不可以寫成 $=0.34\cdots$，因為 $0.34 \nless \frac{1}{3}$。[2] 聰明的妳／你應該明白：前面只是以二位小數舉例而已，你／妳肯定可以把同樣的規則推論到一位、三位、四位 ... 小數的情況。

---

[1] $\bar{x}$ 讀作 x bar。注意 $\bar{x}$ 不像 $0.\overline{9}$，它不是「x 循環」的意思。

[2] $0.33<\frac{1}{3}$ 是因為在不等號兩側同乘以 3，得到正確的不等式 $0.99<1$。其次，不等式 $0.34 \nless \frac{1}{3}$ 讀作「0.34 不小於三分之一」。

[隨堂練習 3]
請解釋為什麼 $\sqrt{2}$ 不能寫成 $=1.412\cdots$ 也不能寫成 $=1.420\cdots$？

當 x 是有理數，我們可以用「長除法」算出它的二位小數表達。例如將 $\dfrac{1}{3}$ 改寫成除式 $1\div 3$，做長除法做到小數點下第二位，得到的商是 0.33，在直式的底端寫了餘 1（請讀者自己算）。重點是：那個餘 1 其實是百分位的 1，也就是 $1\div 3=0.33\ldots 0.01$。回顧小學時期藉由正整數學過的除法等式，它叫做「除法原理」，如下。

[定義] 除法原理
除法算術的計算式：

$$\text{被除數}\div\text{除數}=\text{商}\ldots\text{餘數}$$

可以改寫成等式：

$$\text{被除數}=\text{除數}\times\text{商}+\text{餘數}$$

例如計算式 $22\div 7=3\ldots 1$ 可以改寫為等式 $22=7\times 3+1$。同理，$1\div 3=0.33\ldots 0.01$ 則可以改寫成 $1=0.33\times 3+0.01$，將等式兩側同除以 3，則是

$$\frac{1}{3}=0.33+\frac{1}{300}\ 。$$

可見 0.33 只比 $\dfrac{1}{3}$ 小 $\dfrac{1}{300}$，因為 $\dfrac{1}{300}$ 不到百分之一，所以 0.33 是小於 $\dfrac{1}{3}$ 的最大二位小數。

當我們將一個實數 x 寫成 $\bar{x}\cdots$ 的小數形式，而 $\bar{x}$ 是 k 位小數時，可以簡單地說「準至」k 位小數。例如要將 $\dfrac{22}{7}$ 寫成準至三位的小數，可以先用長除法做 $22\div 7$，取商到三位小數（請讀者自己算），直式底端的 6 意思是小數點下第三位的 6，故得 $22\div 7=3.142\ldots 0.006$。根據除法原理改寫成

$$22=3.142\times 7+0.006\text{，亦即 }\frac{22}{7}=3.142+\frac{6}{7000}\text{，}$$

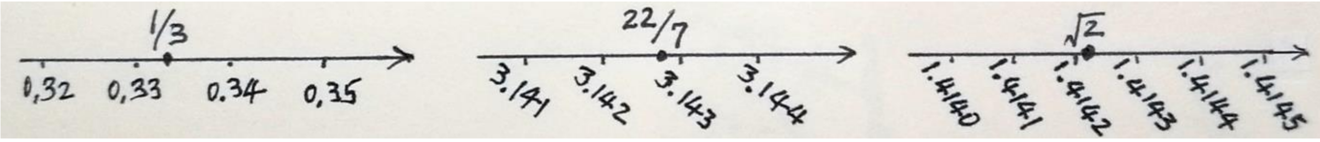
因為 $\dfrac{6}{7000}$ 不到千分之一，可見 3.142 是小於 $\dfrac{22}{7}$ 的最大三位小數。所以我們寫 $\dfrac{22}{7}=3.142\cdots$。

「準至」vs「約至」[3]

當我們用 $\dfrac{1}{3}=0.33\cdots$、$\dfrac{22}{7}=3.142\cdots$、$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 來表達實數時，傳達了兩個訊息：

1. $\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{22}{7}$、$\sqrt{2}$ 這些數是無窮多位的小數，寫出來的小數，僅為估計值。
2. 這些數所對應的點，落在連續兩個十次分點之間。例如 $\dfrac{1}{3}$ 落在連續兩個二位小數 0.33 和 0.34 之間，$\dfrac{22}{7}$ 落在連續兩個三位小數 3.142 和 3.143 之間，$\sqrt{2}$ 落在連續兩個四位小數 1.4142 和 1.4143 之間。如下圖。

[3] vs 是 versus 的縮寫，意思是「相對於」。它也在競賽、辯論或訴訟情境中，用來指稱互相「對抗」或「對立」的雙方。



相對於「**準至**」寫法的數字用了等號 $=$ 以及刪節號 $\cdots$，另有一種「**約至**」近似值的表達方式，用近似符號 $\approx$ 而不用刪節號。例如，觀察上圖，$\dfrac{1}{3}$ 介於 0.33 和 0.34 之間，但是比較靠近 0.33：它在 0.33 與 0.34 之中點 0.335 的左側，我們就寫 $\dfrac{1}{3}\approx 0.33$，讀作 $\dfrac{1}{3}$ 近似於 0.33。同理，$\dfrac{22}{7}$ 介於 3.142 和 3.143 之間，它比較靠近 3.143，所以 $\dfrac{22}{7}\approx 3.143$。至於 $\sqrt{2}$，它介於 1.4142 和 1.4143 之間而比較靠近 1.4142，所以 $\sqrt{2}\approx 1.4142$。

將實數「約至」三位小數的算法，需要先算出「準至」四位小數的數值，然後將它四捨五入至第三位。例如 $\dfrac{22}{7}=3.1428\cdots$，四捨五入之後得到 $\dfrac{22}{7}\approx 3.143$。

[隨堂練習 4]
將 $\dfrac{22}{7}$ 寫成準至五位小數的數字；再將它寫成約至四位小數的近似值。

同學們肯定已經知道：若將 $\dfrac{1}{3}$ 寫成小數，則它是無窮循環小數，記作 $\dfrac{1}{3}=0.\overline{3}$，其中 3 稱為循環節。同樣地，若將 $\dfrac{22}{7}$ 寫成小數，則它也是無窮循環小數，記作 $\dfrac{22}{7}=3.\overline{142857}$，其中 142857 是循環節。既然大家都知道，我就不囉唆了。

我要繼續囉唆的是：不論是一個很多位的有限小數（例如 20 位的有限小數），還是無窮循環小數，在實際的應用中，我們都不常寫出它的全部小數或完整循環節，而是將它約至若干位小數的近似值。使用科學記號來表達數字時，通常只會約至一位、兩位、三位或四位小數。

究竟什麼是實數？我們已經知道：實數是測量連續量的數，實數是數線上所有點的坐標。但這些說法都是觀念，現在我們到了可以用數字描述實數的時候了。

[定義] 實數
無窮多位的十進制小數 $0.d_1d_2d_3d_4\cdots$ 就是 0 與 1 之間（含）的所有實數，其中每一位小數 d_k 都是 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 其中之一。將這些數加上任意整數，就形成所有實數。

我們也可以這樣理解：所有實數寫成小數都有無窮多位，所謂有限小數只是從某一位之後的所有位值都等於 0。例如 $\dfrac{1}{2}=0.5000\cdots=0.5\overline{0}$，$\dfrac{1}{8}=0.125000\cdots=0.125\overline{0}$。

「數式」vs「數值」

因為小數通常都寫成「準至」或「約至」的近似值，所以它顯然有個缺點：不精確。相對而言，像 $\dfrac{1}{3}$、$-1\dfrac{5}{6}$、$3\dfrac{1}{7}$ 這樣的分數是精確的，像 $\sqrt{2}$、$-3\sqrt{3}$、$\sqrt[3]{4}$ 這樣的根式也是精確的，它們都是**數式**，用來精確表達一個實數。數式是純數學的記號，在數學推理過程中，必須使用數式。

可是數式在工程、科學和金融上並不實用，在這些應用數學的領域裡，通常使用近似的小數，稱為**數值**。學習數學的人，必須學會恰當地轉換兩種表達實數的方式：數式或數值。

我們已經知道：數式不是唯一的。例如 $\frac{2}{2}$ 和 $\frac{3}{3}$ 都是 1，$\frac{22}{7}$ 和 $3\frac{1}{7}$ 是指同一個數，而 $\sqrt{18}$ 和 $3\sqrt{2}$ 是數線上同一點的坐標。小數的數值也是不唯一的，但是情況單純得多。例如數式 $\frac{2}{2}$ 和 $\frac{3}{3}$ 寫成小數都是 1（或 1.0），$\frac{22}{7}$ 和 $3\frac{1}{7}$ 寫成小數都是 $3.14\cdots$，$\sqrt{18}$ 和 $3\sqrt{2}$ 寫成小數都是 $4.2426\cdots$。

小數的特殊缺點發生在這裡：已知 $\frac{1}{3}=0.\overline{3}$，若將等式兩側同乘以 3，得到 $1=0.\overline{9}$。我們因此創造出 $0.\overline{9}$ 這樣的數，而且它是「重複」的表達，這也就是眾所皆知的 $0.\overline{9}=1$。類似的情形還有很多，例如 $0.33\overline{9}=0.34$。但是我們既然已經知道「數式」本來就會重複，那麼「數值」也會重複的現象，就沒什麼好大驚小怪的了。

十分逼近法

有理數可以用長除法寫成小數（準至或約至任何位數），但是無理數該怎麼辦呢？辦法之一是根據它的性質寫成方程，然後用「**十分逼近法**」計算它在哪兩個連續的十次分點之間？例如 $\sqrt{2}$ 的性質是 $(\sqrt{2})^2=2$，所以它是 $x^2=2$ 的正解，我們就用十分逼近法來算 $x^2=2$ 的近似解。同學們都會十分逼近法，我就不囉唆了。可是 $\sqrt{2}$ 明明可以按兩三個鍵就知道近似值了，同學們大概已經懶得再用十分逼近法來估算 $\sqrt{2}$ 了吧？所以，我們換個有點挑戰性例子。

[範例 1]

若實數 x 滿足 $x^3+x=1$，試問它落在哪兩個連續千分點之間？寫出 x 準至三位小數的數值。

[解] 因為 0^3+0 不到 1，但 1^3+1 超過了 1，所以判斷 x 應在 0 與 1 之間。用計算機（電算器）計算以下 x 數值的 x^3+x，或者用工具計算 x^3 再自己心算「$+x$」，都可以得到下表：

x	⋯	0.5	0.6	0.7
x^3+x	⋯	0.625	0.816	1.043

可見 x 在 0.6 與 0.7 之間。

在這個範圍裡，嘗試百分點的計算。因為 $0.7^3+0.7=1.043$ 才超過 1 一點點，可見 x 應該比較靠近 0.7，所以從比較大的百分點開始嘗試：

x	0.69	0.68	...
x^3+x	$1.018\cdots$	$0.994\cdots$	...

很快就發現 x 介於 0.68 和 0.69 之間。將 0.68 到 0.69 這個範圍再等分 10 段，做計算

x	0.681	0.682	0.683	...
x^3+x	$0.996\cdots$	$0.999\cdots$	$1.001\cdots$	...

我們發現 x 介於連續兩個三位小數 0.682 與 0.683 之間。所以 $x=0.682\cdots$。

作業 2

班級座號____________________ 姓名____________________

1. 我們已經知道無理數是「揀剩的」。用實數的數值來分類有理數、無理數，可以這樣做：
   - ◆ 若某實數的數值是循環小數，它是有理數。（有限小數其實是一種特殊的循環小數，例如 $0.5=0.5000\cdots=0.5\overline{0}$ 。）
   - ◆ 若某實數的數值不是循環小數，它是無理數。

   想像妳／你可以從 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 之中隨機抽一個數當作第一位小數 d_1，取後放回，再隨機抽一個數當作 d_2，取後放回，再隨機抽一個數當作 d_3，依此類推，抽無窮多次，得到一個實數。想像一下，你／妳如果要抽到一個有限小數，譬如一個二十位小數，意思是說從 d_{21} 開始，妳／你要能抽中無窮多次的 0。假如你／妳要抽到一個無窮循環小數，譬如抽到 $0.\overline{142857}$ ，妳／你得每抽六次都按照順序抽中 1、4、2、8、5、7。

   想像妳／你「隨機」抽選 10 個實數，每個實數被抽中的機會一樣多。則妳／你認為最可能抽中幾個有理數？

   ① 9 個（含）以上　② 6 或 7 或 8 個　③ 5 個　④ 2 或 3 或 4 個　⑤ 1 個（含）以下

   答：__________

2. 試求 $x^3+x=1$ 約至四位小數的解。

3. 在各民族歷史或傳說中，最早遭遇三次方程的是古希臘。傳說有一則神諭，要求將一個長方體神殿的體積放大為 2 倍（新舊神殿必須保持外型相似）。若要每邊放大 x 倍，我們知道它要滿足 $x^3=2$ 。如今，我們用計算機上的 $\sqrt[3]{\ }$ 按鍵立刻就得到 $x=1.1299\cdots$，所以此題已經不值得做。希臘文明第二次遭遇三次方程，是發現了三分角弦長公式。令圓半徑為 1，將圓心角 θ 所對的弦長記為 $C(\theta)$ 。已知 $C(60°)=1$ ，套用三分角公式得知

   $$C(60°)=3C(20°)-[C(20°)]^3$$

   （我們以後再解釋這條公式怎麼來的。）因此 $C(20°)$ 就是三次方程

   $$3x-x^3=1$$

   的一個解。試在 $0<x<1$ 範圍內，求上述方程準至三位小數的解。

科技工具

前面提到立方根，同學們在課堂上學了 n 次方根（$n\in\mathbb{N}$）。如果不用計算機，幾乎沒有人可以心算一般的 n 次方根，這就暗示 n 次方根不能用來解決真實問題。以下網址是一則「次方根」的教學影片，或掃描右邊的二維條碼。若有需要，請跟隨網頁的指引，學習先備的計算機操作法。

http://shann.idv.tw/video/210905.html