

## 4 坐標算法一〔教學說明〕

### 教學目標

推論坐標平面上的基本算法，藉機複習國中平面幾何，並藉以熟悉平面直角坐標。

#### 知

由坐標平面上的點坐標可知點到兩軸的距離；反之，若知道點到兩軸的距離，搭配點所在的象限，可知點坐標。

#### 行

給定點坐標，能做它對稱於  $x$  軸、對稱於  $y$  軸、對稱於  $45$  度直線的點坐標；能寫出對稱於原點的點坐標；能寫出繞原點順時鐘或逆時鐘旋轉  $90$  度的點坐標。能運用基本鏡射與反射原理。

#### 識

坐標幾何用到平面幾何的知識。如果知道坐標平面上的點坐標，則已經知道許多資訊，應當可以利用這些資訊來解決問題。當一點  $P$  不在軸上，沿  $x$  軸和  $y$  軸做  $P$  的「輔助長方形」可以幫助解決問題。

### 主要設計理念

1. 學生在國中階段學習了不少平面幾何的知識與技能，到了高中多半無用武之地。事實上，笛卡兒的坐標幾何是延續平面幾何而發展的，本文希望在學生觀念中具體地建立平面幾何與坐標幾何的傳承關係，用基本的平面幾何知識（例如三角形的全等性質）推論坐標幾何的算法。
2. 幾何的「剛性」操作無非就是鏡射、旋轉、平移；這一課針對常用的特例，介紹前兩項，下一課將介紹第三項。這些操作都是伴隨著坐標幾何一起被「發明」的算法，也將成為坐標幾何的最基本概念與最基本操作。
3. 「反射」之光學原理，是古希臘發展切線概念與圓錐曲線的重要動機，也是操練直線運算的主要情境，所以本文初步介紹它。將來還要繼續借重於它。

### 教學備忘

1. 本課故意不要直接定義負度，所以直線與水平線的夾角有分「仰角」與「俯角」，旋轉也分「順」和「逆」時鐘方向。這樣做的目的是減緩學習的坡度，為角度的正負性提供前置經驗。
2. 「旋轉  $90$  度」的教學，可使用一個「吸管黏在對角線上」的那種盒裝飲料。將整個盒子旋轉  $90$  度，吸管也跟著旋轉  $90$  度，這個動作很有教學效果。
3. 「反射」是許多高中的直線方程式教學內容。《別冊》進行到此的時候，「正課」可能還沒學到反射課題。這應該沒有關係，因為本課僅以  $x$  軸或  $y$  軸作為反射線。相反地，如果「正課」沒有安排反射例題，也沒有關係，不必刻意補充；《別冊》將會自行發展所需的反射主題。
4. 請注意學生可以直接推論順時鐘旋轉  $90$  度的公式，可是隨堂練習 5 故意要求使用另一種推論方式。這樣做的目的是增加思維的彈性。

## 教學素養

線性代數就是在平面上／空間中處理特定幾何問題之代數方法而發展出來的一個數學次領域。最初，線性代數關心的問題是：同一個平面幾何物件，可能只因為在平面上安置了不同的坐標系而產生不同的方程式，這些方程式之間應該有某種關係，讓我們能夠辨識它們是同一個幾何物件的不同代數表達式。對於直線與圓，這個問題很輕鬆地解決了。可是對其他圓錐曲線，事情就沒那麼簡單。

如果建立的是直角坐標系，則坐標的變化，無非就是旋轉、鏡射、平移與縮放；其中縮放又分為等比例的縮放：每個軸的單位長保持一樣長，或者不等比例：每個軸各自縮放。高中數學課程中，有一系列的課題，就是在此問題意識之下發展出來的。教師若能讓學生明白這一條脈絡，可望學習能夠更「有感」，除了有助於掌握線性代數的基本概念之外，也有助於建立數學的整體概念。如果坐標軸不必互相垂直，當然就需要更一般化的線性代數知識與技術了。

這一本《別冊》將會引導學生認識：微積分是從坐標幾何發展出來的；後面的《別冊》也會引導學生認識：線性代數也是從坐標幾何發展出來的。坐標幾何真的是近代歐洲科學與技學的共同基礎。雖然坐標幾何一半來自平面幾何（另一半來自方程），可是究竟有多少平面幾何的先備知識，是學習坐標幾何所必備的呢？這個問題，是世界各地的數學教育都關心的議題，在西方已經爭辯了超過一百年。如今，大數學家（例如兩位菲爾茲獎得主：丘成桐和 Cédric Villani）也都只能用「鍛鍊縝密的心智」作為學習平面幾何的理由。事實上，世界各國的平面幾何課程內容不約而同地一減再減，減到現在已經顯得支離破碎，使得平面幾何的學習更加難以「有感」。過去，高中數學教師潛意識地認為學生在國中已經備妥「所有」平面幾何知識，這個假設可能仍然是正確的，可是學生在國中階段習得的幾何知識越來越零碎，需要高中老師藉著坐標幾何的學習機會，給學生一些統整性複習的機會。

旋轉 90 度，對  $x$  軸、 $y$  軸、45 度直線鏡射，都是基本的坐標幾何操作。如果教師留意，將會發現非常多可以應用的機會——例如在學習三角比的時候。到了 11 年級學習一般性的平面線性變換時，可以先複習這兩種變換，作為一般性變換的特例，而一般性的平面線性變換也可以理解成這兩種變換的推廣。

在坐標平面畫一個點的「輔助長方形」，就跟在空間坐標系上，畫一個點的「輔助長方體」一樣，都具有良好的輔助效果，請教師參考。當學生遇到初級的想像困難時，請記得試試看這一招。它不只是一個好用的技術，其實也是直角坐標系的原理。