

關於數學不確定性素養的建議

許哲毓 國立中央大學學習與教學研究所博士生

單維彰 國立中央大學數學系與師培中心教授

摘要

本研究利用國際數學評量之不確定性(uncertainty)試題，擷取關鍵知識與技能，作為國中教師在此方面知能成長的參考素材。

根據臺灣國中小數學領域課綱，發現不確定性的概念除了在六年級和九年級簡單提出介紹後，並無類似概念單元在課綱中。所謂不確定性題型為理解真實生活中事件的變異成因、可將問題量化後而獲得解決。它包含資料蒐集與組織、資料呈現、資料解讀，其數學內容俱有多樣性，因為這種課綱現況存在多年，多數數學教師在不確定性方面的概念詮釋與教學經驗略不足於其他單元，且師資培育課程中也較缺乏此方面專業知能與教材教法，而十二年國教之新課綱正在研議增強這方面的內容。所以，提供師資在此或職前培育之「不確定性」題材，是當前重要的課題。

我們依數學專業內容分為五項：機率的代數(A)、圖表判讀 (R)、圖表製作(W)、機率推論(P)、統計推論(S)，並依數學認知分為三步驟：概念理解(1)、程序執行(2)、解題思考(3)。用以上兩種維度建立雙向細目表，分析國際數學及科學趨勢研究(TIMSS)資料庫中提供的八年級歷年試題與國際學生評量方案(OECD PISA)的釋出試題，探究其不確定性(uncertainty)的題型。了解近 10 年這類型試題分佈及特徵，並用以加強教師對於不確定性的認知。

關鍵字：不確定型問題、數學教師、TIMSS、PISA

Keyword：uncertainty, math teacher, TIMSS, PISA

前言

國際間日益競爭與知識經濟的興起，各國為了解國民教育中學生的教育品質脈絡，研擬各種相關評量計畫，如歐洲經濟暨合作發展組織 OECD 的國際學生評量計畫 Programme for International Student Assessment (PISA)、國際教育學習成就調查委員會 (The International Association for the Evaluation of Education Achievement, 簡稱 IEA) 的國際數學和科學趨勢研究 Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)、國際閱讀素養研究計畫 Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS)，其中國際數學及科學趨勢研究與國際學生評量方案皆探討了數學科目，由此可以發現國際間相當重視學生所受的數學教育。在此潮流趨勢下，國民教育中數學的地位不容小覷。因此，培養具有數學觀的學生，成為國家發展的重點項目，而數學教師的培育更扮演著舉足輕重之角色。

臺灣在經歷教育改革與多元開放後，培育未來教師之任務，除了師範教育大學外，一般大學也擁有數學師資培育課程與認證。符合教育「鬆綁」之訴求(行政院教育改革審議委員會，1996)，也加速了市場選擇機制。此舉本應助於提升數學科實習教師與專任教師的素質，但逢學校意識變遷，每個學校實行政策，發展各自特色與重點，卻造成不同學校間，未來數學教師的專業認知有著差異性，間接使得教師素質參差不齊。有鑑於此，建立專業標準的培育課程是當下的目標。

比較臺灣現行的數學課綱與兩評量的內容，對照之後顯示出數與量、代數、幾何三領域，內容深度大致上相同，且學習目標也一致。但在統計、機率和資料分析這種不確定性的問題上，臺灣方面教材上是較為短少的，所謂的不確定性與資料分析，PISA 指出不確定性與資料分析題型素養包含：為理解生活中各種造成變異的成因、具有量化和解釋變異的能力、測量時所隱含的不確定性的知識以及機率統計的問題。例如：選舉結果、天氣預測、經濟模型的變動。而這現象造成升學考試內容偏少，課堂上明顯影響教師在授課上的力度，且教師的專業認知經驗上，容易忽略此面向重要性。

據文獻可知，教師的教學與專業影響學生的表現。再者，十二年國教課綱現正研擬增加此面項內容，故本文研究將透過兩評量不確定性試題的分析，探討不確定性之觀點與脈絡，讓教師能察覺並增加此面向視野，另一方面也可作為十二年國教課程內容調整之參考。

文獻探討

在歷經多次教育改革影響下，國際評量與教師專業知能的重視下，本研究將以評量提供的內容作分析探究，以下將分為一，資料庫的認識；二教師專業知能的論述，三內容分析法之討論

一、國際性評量

TIMSS

由國際教育成就調查委員會 (IEA)所舉辦的國際數學與科學教育成就趨勢調查，簡稱 TIMSS，目的在於探究四年級與八年級學生的學科成就。自 1995 年開始，每四年為週期舉辦，以數學與科學作為施測科目，此結果可讓各國了解教育政策與文化趨勢。

學習成就與問卷調查建置成一個縱向資料庫。評量架構主要是課程導向，研究對象的選擇採抽樣方法，以兩階段分層群集抽樣設計 (two-stage stratified cluster sample design)，先進行學校抽樣，再進行班級抽樣，根據結果探究影響這兩科學習成就的因素。

1999 年開始至今，臺灣都參與測驗，可觀察臺灣學生學習成就表現變化趨勢，並和各國進行國比較，作為我國數學與科學教育研究與實施之參考，了解國際上評量學生學習成就的趨勢與新的評量方法，提供我國教師教學上的提升。

PISA

經濟合作暨發展組織 (OECD)正式成立於 1961 年，前身為 1948 年創立的歐洲經濟合作組織 (Organisation for European Economic Co-operation, OEEC)。OECD 舉辦國際學生評量方案 (PISA)，從 2000 年開始，並依據評量年度命名。科目有閱讀、數學、科學，歷屆評量結果可建構一個縱向追蹤的資料庫。

針對年滿 15 歲學生進行強調素養 (literacy) 的測驗，素養內涵強調於應用生活中所遭遇問題之解決，探討領域定義為「為成功適應改變中的世界所需之知識與技能」，學生應用知識於真實生活中，幫助學生未來發展。

數學建模的歷程中最主要的關鍵程序為：問題的描述、數學模式的建立、答案的解釋與預測三大項 (OECD, 2009a, 2009b)，根據關鍵程序擬題，施測結果以供研究者分析與探究，檢視資料對於國家之教育政策有精進之用途。

二、PCK 數學教師專業知能

Shulman (1987) 提出 PCK 的觀念，指出一般教師應包含七類有效知識：學科內容知識、一般教學法知識、課程知識、學科教學知識、對學習者及其特質的知識、教育情境知識及對教育目標、價值及其哲學與歷史背景的知識，而面對社會變遷的挑戰與需求，教師應能配合新課程需要，調整與學習新的專業能力 (何金針，2006)，且在教學現場中教師擁有完備的學科教學知識，能有效提升學生學習 (張靜儀，2006；黃萬居、熊瑞棻，2004)。

在數學教育上，以學科教學知識最為重要。數學教學知識是教師對於數學脈絡的融匯，且能察覺學生學習認知困難 (李源順，2005)，故數學教學知識是融合教師學科內容知識與對學習者整合特性的知識，具有領域特定性 (林碧珍，

2001 ; Shulman, 1986)，其他研究顯示，臺灣數學教師的教學知識多以課本內容傳遞 (李源順、林福來，2000)，此舉將限制教師專業知能的廣度，以及教學創新的阻礙。因此，能培育將數學教學知識傳遞給學生融會貫通的教師，是數學師資培育上重要的課題。

三、內容分析法

王文科 (2002) 認為內容分析法 (content analysis) 意同於文獻分析或資料分析。在教育研究上，透過試題的分析或文件資料的彙整獲得核心價值。而歐用生 (1994) 認為內容分析法為融合量化與質性的分析，採客觀與系統的態度，進行資料內容的探究，藉以推論內容之意義性。根據統計資料的脈絡，方能更進一步針對自己的研究加以定位。

研究者根據過去文獻，發現在師資培育研究，討論數學教師的專業知能，明確理解發展數學教學知識是重要的。而 PISA 和 TIMSS 的研究偏向探究影響學生成就或是素養的因素，因此，本研究將分析較少討論的「不確定性問題」，結果作為師培課程與在職教師專業發展上之參考。

研究方法

內容分析法研究包括，書本、雜誌、網頁等形式資料。本研究選取網路上已公開試題作為資料來源，本文根據 TIMSS 官方網站上 TIMSS-R、TIMSS2003、TIMSS2007 和 TIMSS2011 八年級數學試題，以及 PISA 官方網站上公開釋出的兩份數學樣本試題，一份為 2011 年以前的樣本試題，另一份為 2012 年的樣本試題，從中擷取各年份的不確定性題目，總題數共 56 題。

再將題目依年份進行題號編碼、命名、分類，其中分類項目由下段說明。TIMSS 試題以年份排序，編碼為 T，命名由研究者根據題目關鍵內容所取名，題號採用原始試題代號；PISA 的年份分為 2011 以前和 2012 兩種，試題以 P 編碼，命名和題號採用原始試題的編制。如下表。

編碼	命名	年份	題號	分類
T1	機率代數	Timss-R	N-18	A3
P1	USB 隨身碟	PISA2012	PM00A-2	R3

接續研究者將建立雙向細目表進行試題內容分類，分為兩種維度。其一維度根據 TASA 數學評量架構中的數學認知要求依序「概念理解」、「程序執行」與「解題與思考」三項。其二建立不確定性內容的維度，此項由研究者擔任編製試題、教材編寫、參與課綱調整經驗，逐步分思考層次統整出五項目，分別是機率的代數(A)、圖表判讀(R)、圖表製作(W)、機率推論(P)、統計推論(S)，如下表，

數學認知	不確定性內容
------	--------

1：概念理解	機率的代數(A)
2：程序執行	圖表判讀(R)
3：解題思考	圖表製作(W)
	機率推論(P)
	統計推論(S)

最後將依據上述分類模式，建立 TIMSS & PISA 不確定性試題編序表如下。

表 1.

編碼	命名	年份	題號	分類
T1	機率代數	TIMSS-R	N-18	A3
T2	文具數量圖	TIMSS2003	M01-7	R2
T3	班級人數機率	TIMSS2003	M02-9	R3
T4	測驗成績圖	TIMSS2003	M03-11	A3
T5	轉盤區域顏色機率	TIMSS2003	M04-9	A2
T6	人數抽樣	TIMSS2003	M09-14	S2
T7	選取珠子機率	TIMSS2007	M01-7	A2
T8	車輛數圖	TIMSS2007	M02-12	R1
T9	音樂會票數圖	TIMSS2007	M02-13	R2
T10	樂團受歡迎程度	TIMSS2007	M02-14	W2
T11	票卷機率比較	TIMSS2007	M03-2	P1
T12	學科受歡迎程度	TIMSS2007	M04-12A	A2
T13	轉盤區域顏色繪圖	TIMSS2007	M07-11	W2
T14	汽水銷量(等差數列)	TIMSS2011	M01-2	R3
T15	彈珠抽取機率	TIMSS2011	M02-13	P3
T16	年齡結構圖	TIMSS2011	M02-14	S3
T17	鈕扣抽取機率	TIMSS2011	M03-15	A3
T18	運動與人數繪圖	TIMSS2011	M03-17	W2
T19	未來規劃圓餅圖	TIMSS2011	M05-13	W3
T20	糖果機率(條件不嚴謹)	TIMSS2011	M05-14	P3
T21	候選人可能性	TIMSS2011	M06-11	P1
T22	估計轉盤上指針落在區域次數	TIMSS2011	M07-11	A3
T23	汽車產量題(A-敘述不明確)	TIMSS2011	M07-13	R3
P1	USB 隨身碟	PISA2012	PM00A-2	R3

P2	播放器故障率-1-2	PISA2012	PM00E-1	P3
P3	播放器故障率-1-3	PISA2012	PM00E-1	P3
P4	播放器故障率-2	PISA2012	PM00E-2	S3
P5	播放器故障率-3	PISA2012	PM00E-3	P3
P6	唱片排行榜-1	PISA2012	PM918	R2
P7	唱片排行榜-2	PISA2012	PM918	R2
P8	唱片排行榜-3	PISA2012	PM918	S3
P9	企鵝-4	PISA2012	PM921	R3
P10	渡假公寓-2	PISA2012	PM962	S3
P11	有線電視-1	PISA2012	PM978	A2
P12	有線電視-2	PISA2012	PM978	S3
P13	哪一輛車	PISA2012	PM985	R3
P14	成長-1	PISA	M150	R1
P15	成長-2	PISA	M150	R3
P16	搶劫	PISA	M179	R3
P17	反應時間-1	PISA	M432	R1
P18	反應時間-2	PISA	M432	R3
P19	外銷出口-1	PISA	M438	R1
P20	外銷出口-2	PISA	M438	R3
P21	彩色糖果	PISA	M467	A3
P22	科學測驗	PISA	M468	S2
P23	春天園遊會	PISA	M471	P3
P24	廢棄物	PISA	M505	R3
P25	測驗分數	PISA	M513	S3
P26	童鞋	PISA	M515	R1
P27	滑板-1	PISA	M520	R3
P28	滑板-2	PISA	M520	P3
P29	滑板-3	PISA	M520	W3
P30	減少二氧化碳濃度-1	PISA	M525	A3
P31	減少二氧化碳濃度-2	PISA	M525	R3
P32	減少二氧化碳濃度-3	PISA	M525	S3
P33	總統支持度	PISA	M702	S3

分析結果

本章主要分為兩部分，第一部分為建立 TIMSS 和 PISA 雙向細目表，並討論試題分佈情況，第二部分為試題內容分析，以了解編制試題的模式。

一、TIMSS 和 PISA 雙向細目表

TIMSS

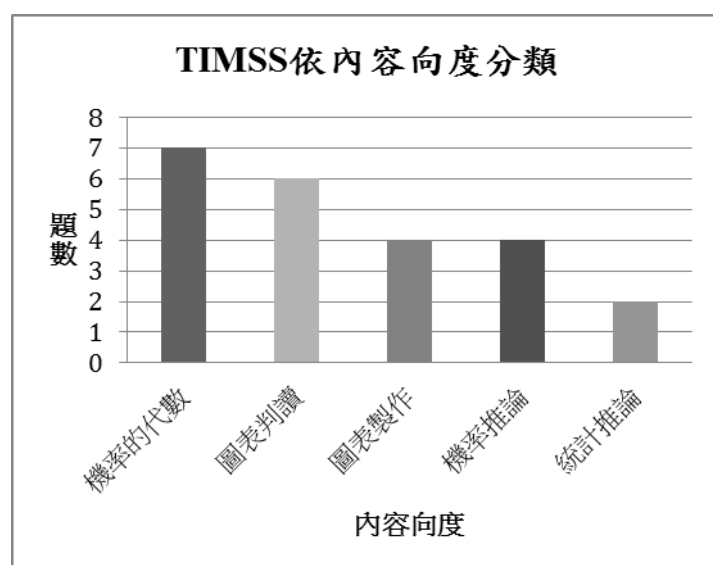
根據我們編製的雙向細目表將題目逐層分類，建立成 2*2 矩陣如下表，以利後續分析用途，整體來看題型分佈算是平均。而圖表判讀在數學認知要求三種類型皆具備，顯示 TIMSS 在圖表判讀上，對於已知資料的分析，從中擷取必要資訊的重視。

表 2.

數學認知層次 數學內容	1.概念理解	2.程序執行	3.解題思考
機率的代數(A)	0	T5,T7,T12,	T1,T4,T17,T22
圖表判讀(R)	T8	T2,T9	T3,T14,T23
圖表製作(W)	0	T10,T13,T18	T19
機率推論(P)	T11,T21	0	T15,T20
統計推論(S)	0	T6	T16,

由圖一，可知 TIMSS 在數學專業內容分類機率的代數共 7 題、圖表判讀共 6 題、圖表製作共 4 題、機率推論共 4 題以及統計推論共 2 題;以機率的代數 7 題最多，而統計推論 2 題最少。顯示出 TIMSS 在內容向度中，試題分配顧及所有向度，能有效測出學生不確定性之內容理解能力。

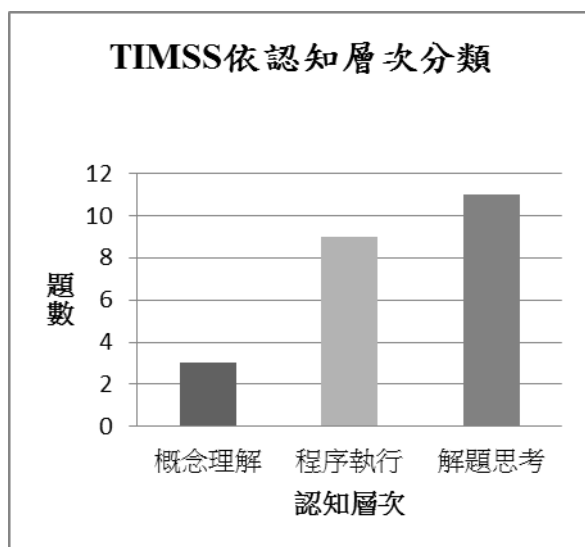
圖 1.TIMSS 內容向度



再者，由圖二數學認知層次分類的概念理解共 3 題、程序執行共 9 題以及解題思考共 11 題，顯示解題思考最多，概念理解最少。顯示出 TIMSS 強調在認知

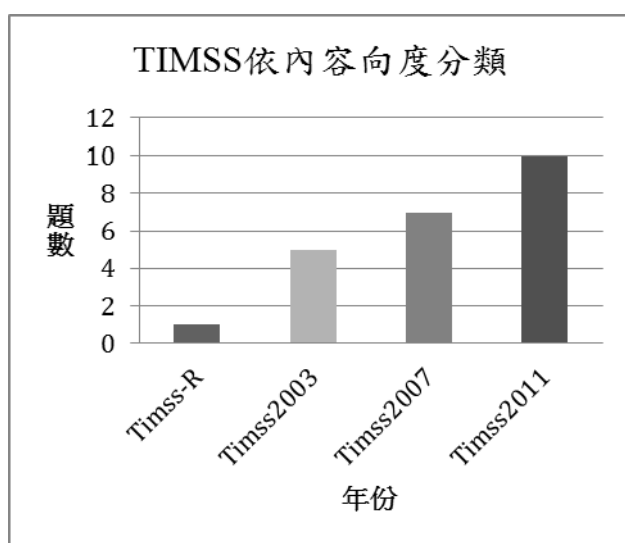
層次最高的解題思考上，希望學生在不確定性試題中，不能只有一般計算程序的概念或是執行，而是具備思考與判斷的認知。

圖 2.數學認知層次題數



由圖 3，將題目類型分年份來看，TIMSS-R 有 1 題，TIMSS2003 共 5 題，TIMSS2007 共 7 題，TIMSS2011 共 10 題，發現不確定型的題型逐年增加，有穩定成長趨勢，內容分布多面向，增加解題的複雜度，整體而言更貼近實際經驗問題，因此，我們應對不確定性試題更加敏銳，加強學生對此面向之融會運用。

圖 3.



本節根據我們編製的雙向細目表，將 PISA 題目逐層分類，建立成二維度矩陣。如下表，結果利後續分析用途。整體來看，試題的分佈較不平均，研究者認為 PISA 欲培養實際問題解決的素養，故數學內容的概念理解與程序執行較少出現。

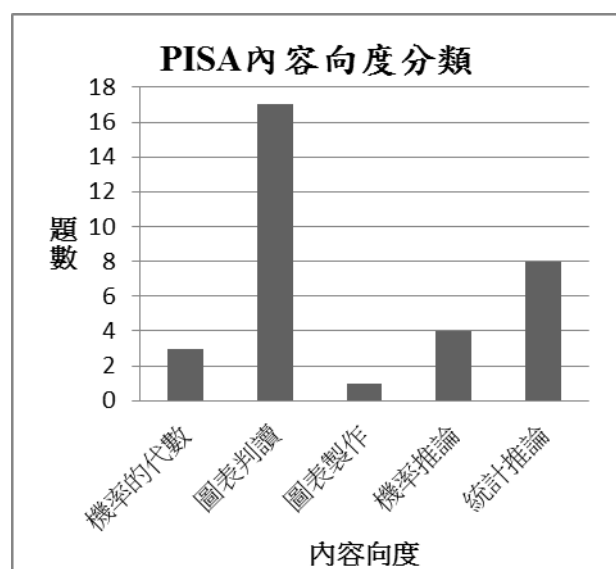
而圖表判讀在數學認知要求三種類型皆具備，與 TIMSS 的情況一致。由此可知兩評量針對學生對圖表的詮釋是相當重視的指標。

表 3.

數學認知層次 數學內容	1.概念理解	2.程序執行	3.解題思考
機率的代數(A)	0	P11,	P21,P30
圖表判讀(R)	P14,P17,P19, P26,	P6,P7,	P1,P5,P9,P13,P15 ,P16,P18,P20,P24 ,P27,P31
圖表製作(W)	0	0	P29
機率推論(P)	0	0	P2,P3,P23,P28
統計推論(S)	0	P22,	P4,P8,P10,P12,P2 5,P32,P33

由圖 4，可知 PISA 在數學專業內容分類機率的代數共 4 題、統計推論共 8 題、圖表判讀共 17 題、圖表製作共 2 題以及機率推論共 4 題;其中以圖表判讀題數最多。由此，我們可以知道 PISA 對於圖表報讀的重視，而這項目也符合學生在未來生活中，將會應用到各領域行業中。

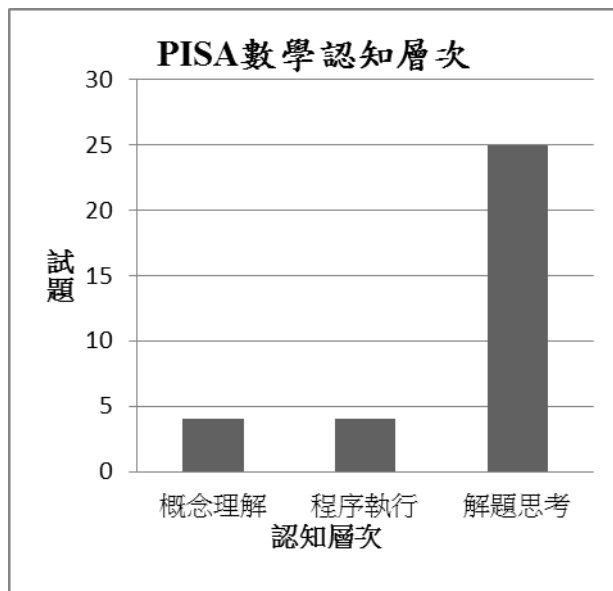
圖 4.



再者，由圖 5 可知數學認知層次分類的概念理解共 4 題、程序執行共 4 題以

及解題思考共 25 題，其中解題思考最多。表示 PISA 跳離一般數學學習的框架，不是以計算方面的程序執行為主，而是在於如何思考問題核心，從中找出訊息，做出正確的判斷與決策。

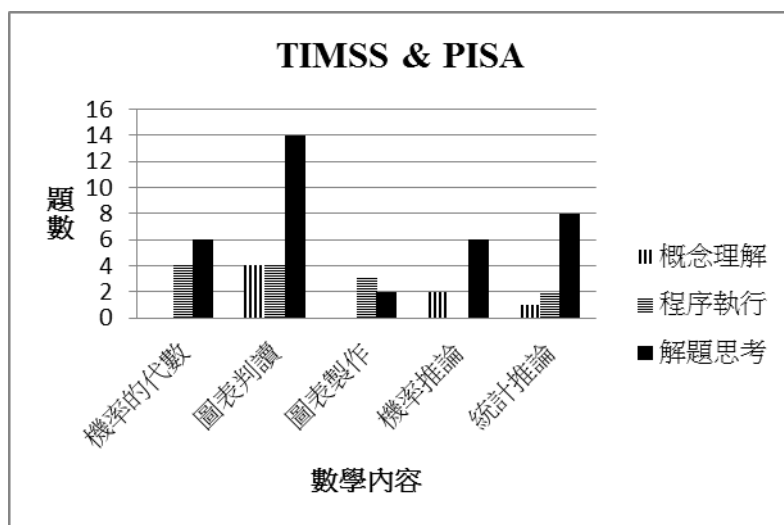
圖 5.



TIMSS 和 PISA

研究者融合 TIMSS 和 PISA 雙向細目表如圖 6，顯示兩評量都相當重視不確定性問題的解決能力或是素養，然而也發現兩評量在概念理解上，機率的代數、圖表製作的題型是沒有出現的，以及機率推論的程序執行上也是未出題，研究者認為由於概念理解認知層次較低，且評量題數有限，所以並非重點題目，但是在機率推論來說，則是因為兩評量的問題，皆是在解題程序執行後，還需要再思考題目所求，故都分類至解題思考中。

圖 6.



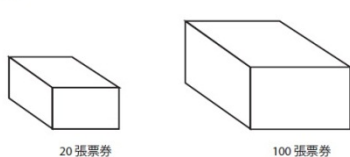
二、試題分析

本節挑選兩評量試題中做分析,分別是機率推論的概念理解 (P1)、機率推論的解題思考 (P2) 以及統計推論的解題思考 (S3), 共三項目, 從中探索內容脈絡與教學上概念。

機率推論的概念理解 (P1)

由圖 7, 我們可以發現题目的敘述存在於學校經驗中, 學生能快速聯結問題, 敘述上是相當簡單易理解的, 但關鍵是必須釐清核心問題, 屬於概念性非常的強的題目。且非強調學生計算能力, 而是在於理解機率的基礎定義, 因此, 在教學上, 老師應重視機率的定義, 並能傳遞給學生, 而不是訓練計算怪異數字上。

圖 7.

<p>從小盒子中裝了 20 張編號從 1 到 20 的票券, 大盒子中裝了 100 張編號從 1 到 100 的票券。</p>  <p>你可以任意從其中一個盒子裏拿出一張票券來, 問哪一個盒子中拿到 17 號票券的機率比較大?</p> <p>(A) 裝 20 張票券的盒子 (B) 裝 100 張票券的盒子 (C) 兩個盒子的機率相同 (D) 無法得知</p>	<p>25 小珮和小勇是學生會主席的候選人, 選舉的結果如下:</p> <p>小珮 80% 小勇 20%</p> <p>隨機找一個學生來問, 這位學生把票投給小珮的可能性為何?</p> <p>(A) 這位學生一定把票投給小珮。 (B) 這位學生很可能把票投給小珮。 (C) 這位學生不太可能把票投給小珮。 (D) 這位學生一定沒有把票投給小珮。</p>
---	--

機率推論的解題思考 (P2)

由圖 8 我們可以知道題目建立在機率的觀念與程序執行上, 需要撥絲抽繭後, 將題目中的隱藏資訊找出, 再進行問題的思考, 在教學上, 教師應按步驟引導學生, 了解题目的架構, 清楚的定義和條件, 再進行最後的解題。

圖 8.

22 袋子中有 10 顆彈珠：5 顆紅色、5 顆藍色。
小蘇從袋中隨機抽出一顆彈珠，顏色為紅色。
然後她將彈珠放回袋中。
請問她隨機抽出下一顆彈珠，顏色為紅色的機率是多少？

Ⓐ $\frac{1}{2}$
Ⓑ $\frac{4}{10}$
Ⓒ $\frac{1}{5}$
Ⓓ $\frac{1}{10}$

問題 3：播放器故障率 PM00EQ03-019

創尼斯公司也生產影片和音樂播放器。在每天生產結束後，創尼斯公司也會對產品進行檢測，故障的產品會被移除進行修復。

下表為這二間公司在影片播放器和音樂播放器每天的平均製造數量與平均故障率的比較。

公司	影片播放器每天平均產量	播放器每天平均故障率
伊雷克公司	2000	5%
創尼斯公司	7000	4%

公司	音樂播放器每天平均產量	播放器每天平均故障率
伊雷克公司	6000	3%
創尼斯公司	1000	2%

伊雷克公司和創尼斯公司，哪家公司整體的播放器故障率較低？利用上表的數據，寫出計算過程。

統計推論的解題思考 (S3)

由圖 9 我們可以知道題目情境貼近於生活經驗情境，強調生活語意，並從情境中發展出偏向開放性問題，這樣的架構，較能讓學生感受到數學應用於社會中，學生的數學概念較易建構，而且可以由解題思考過程中，整理出有規律的思考，最後這兩題表達方式分別是看圖解題和純文字題，顯示多樣化的問題模式，在教學上，教師應帶著學生學習看題目，強調學生對於語言及圖表的理解，以解決不同的表達題型。

圖 9.

23 **比較 X 國和 Y 國這兩國的年齡結構** M702

以上圖表顯示 X 國和 Y 國的人口年齡結構。人口從最年幼到最年長分成三個年齡層，這些圖表可預測人口成長情形。

A. 相較於 Y 國的年齡結構，為什麼 X 國的年齡結構可能導致更快速的人口成長？

B. 為什麼 Y 國在照顧老年人口上可能會比 X 國面臨更大的問題？

M702：總統的支持度 M702Q01-0129

問題 1：總統的支持度

在 Zedland 國家，為了要瞭解這次選舉的總統支持度，進行了一些民意調查。有四家報社各自進行全國性的民調。這四家報社的民調結果如下：

報社 1：36.5% (在 1 月 6 日進行民調，隨機選取 500 個具有投票權的國民作為樣本)

報社 2：41.0% (在 1 月 20 日進行民調，隨機選取 500 個具有投票權的國民作為樣本)

報社 3：39.0% (在 1 月 20 日進行民調，隨機選取 1,000 個具有投票權的國民作為樣本)

報社 4：44.5% (在 1 月 20 日進行民調，選取 1,000 個進行電話投票的讀者)

假如選舉是在 1 月 25 日，哪一家報社的民調結果最能夠預測總統的支持度？請給兩個理由來說明你的答案。

TIMSS 和 PISA 施測至今，雖然兩評量的訴求並不全然相同，但本文整理了 56 題不確定性題目，貢獻於社群，檔案的網址如下：

tn.ncu.edu.tw/sites/default/files/103ncu_uncertainty01.pdf

依照雙向細目表可以知道，題目涉及的數學專業與數學認知要求更趨多元化，進而處理問題所需要更高層次的能力與認知。題目內容敘述多以真實情境來問答，不外乎是為了讓學生感受數學貼近學校的生活經驗，更是與未來成人社會的連結。

這樣的非傳統抽象概念導向的模式，是目前國際組織對於數學教育的看法，從傳統的數學知識的理論根本訓練，轉變為能將數學應用並與外在世界作為連結，不再強調寫算的問題，而是能解釋或解決於生活情境中的問題，作為數學素養的訴求。

課程上來說，國際評量以八年級和 15 歲學生進行施測下，然而對比我國目前的課程規劃，九年級學生才會接觸到不確定型問題，在此之前都沒有在正式課程中出現，因此，我們應該提前在七年級時開始訓練統計思維，循序漸進，從認識基本統計的計算與名詞定義，能讀懂各種生活中統計圖形與表格的意義，到自己能將一份資料整理成報表，分析出資料隱藏的訊息，發現情境脈絡變化的關鍵點，如此一來，才能與國際數學教育趨勢接軌。

教學上建議利用 PBL (Problem-Based Learning) 的概念，提供學生去解決問題的機會，由學生主導不確定性的專題報告。教師輔導學生對於不確定性的理解與理論建立，培養學生開放式思考，利用高層次的機率與統計推論結果，作為問題解決可執行性的方案。以真實案例，讓學生瞭解未來社會的需求。不確定性知識相較於其他數學內容，不是紙上談兵，而是存在於一般生活中。

參考文獻

尤欣涵、楊德清（2010）：台灣教研院教材與美國 MiC 教材於機率課程設計上之差異性比較。**台灣數學教師電子期刊**，**22**。

王文科（2002）：**教育研究法**。臺北：五南。

何金針（2006）：學校本位課程與高職教師專業發展。**北縣教育**，**56**，50-54。

李源順、林福來（1998）：校內數學教師專業發展的互動模式。**師大學報,科學教育類**，**43(2)**，1-23。

李源順、林福來（2000）：數學教師的專業成長:教學多元化。**師大學報,科學教育類**，**45(1)**，1-25。

李源順（2005）：學生教師運用知識庫學習數學教學：理論與實務的連結。**科學教育學刊**，**13(1)**，53-70。

- 李源順、王美娟、蘇意雯、陳怡仲（2009）：臺灣學生在 TIMSS 的數學表現及其啟示。**教育人力與專業發展雙月刊**，**26(6)**，61-71。
- 李源順、林福來、呂玉琴和陳美芳（2008）：小學教師數學教學發展標準之探究：學者的觀點。**科學教育學刊**，**16(6)**，627-650。
- 林碧珍（2001）：**發展國小教師之學生數學認知知識理論結合實務研究取向的教師專業發展**。台北：師大書苑。
- 徐偉民、徐于婷（2009）：國小數學教科書代數教材之內容分析：台灣與香港之比較。**教育實踐與研究**，**22(2)**，67-94。
- 張靜儀（2006）：學科教學知識(PCK)應用於課程設計之研究。**國立編譯館館刊**，**34(1)**，85-95。
- 教育部（2003）：**92年國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域**。台北：教育部。
- 教育部（2003）：**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北：教育部。
- 教育部（2008）：**97年國民中小學九年一貫課程綱要-數學學習領域**。台北：教育部。
- 陳仁輝、楊德清（2010）：台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。**科學教育學刊**，**18(1)**，43-61。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）：《九年一貫數學科暫行綱要》與《加州公立學校數學內容綱要》之比較。**中華民國數學學會**。取自 http://www.math.ntu.edu.tw/phpbb-2/edu/articles/article_03_09_17.htm。
- 游自達、林宜城、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊（2007）：九年一貫課程之教科書總評鑑總結報告：設計理念、能力指標與統整性。台北：中華民國課程與教學學會。
- 黃萬居、熊瑞棻（2004）：新世紀國小科學教師專業素養之研究。**台北市立師範學院學報**，**35(2)**，201-230。
- 歐用生（1994）：教育研究法。台北：師大書苑。
- 鄭寰文、洪秀珍、周惠綺、梁淑坤（2011）：國中數學教科書分析-以 99 學年部编版為例。**台灣數學教師電子期刊**，**32**，15-32。
- 謝豐瑞（2006）：中學教師數學教學能力專業發展研究(1)。**行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(NSC 94-2522-S-003-009)**。臺北市：國立臺灣師範大學。
- 謝豐瑞（2008）：中學教師數學教學能力專業發展研究 (III) 。**行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 96-2522-S-003-008)**。臺北市：臺灣師範大學。
- 謝豐瑞（2012）：國高中數學教學專業知能指標。**中等教育**，**63(3)**，30-47。

- 鍾靜 (2005) : 論數學課程近十年來之變革。 *教育研究月刊*, **133**, 124-134。
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- OECD (2009a). *PISA Data Analysis Manual: SPSS Second Edition*. Paris, France: Author.
- OECD (2009b). *PISA2009: Programme for International Student Assessment 2012*. 9. 12, from http://pisa.ipn.uni-kiel.de/fr_reload.html?pisa2009_eng.html
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-15.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.