多項式與微分學的第一篇論文

單維彰‧100 年 11 月 20 日

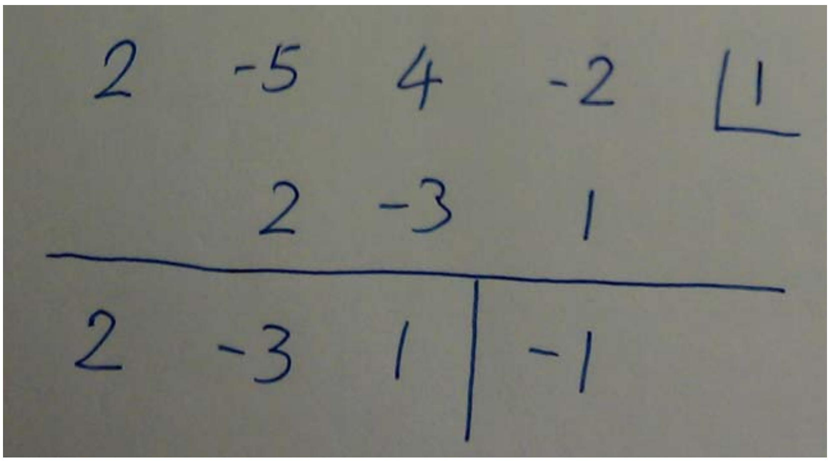
多項式是數學的最基本物件，可能應該緊跟在實數之後。也就不難理解，爲什麼它在國中二年級就進入了數學課程，繼續發展到高中。國中時期學習了多項式的加減乘除四則運算，還看不出它何妙之有？這種學習聽起來就蠻枯燥的；但是，如果老師能用一種遊戲式的，甚至於帶著幽默感的態度，把多項式看成擴充了正整數的一種新玩具，把四則運算當作擴充了正整數（直式）四則運算的新遊戲規則，帶領同學「玩」一場新遊戲，則似乎這段學習還可以不太枯燥。

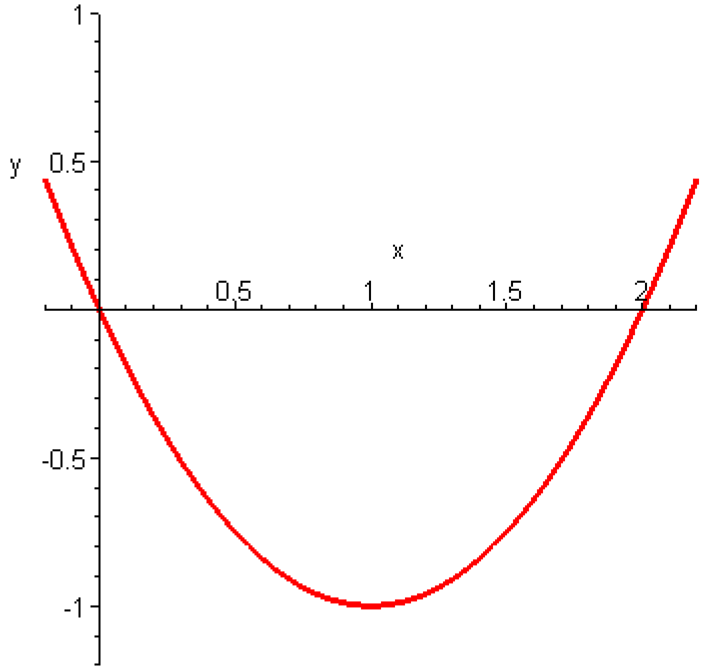
高中時期的多項式學習，已經可以讓學生領略它的美妙。現行的課本和教材，已經深入闡述了它的一兩個面向的妙處，而這一篇專欄想要「平衡報導」另一個面向。重點是，本報導並非根據更多或更新的「事證」，保證僅限於現有的高中課程內容，只是做了新的連結和詮釋而已。

所謂多項式不過就是像 x^2-2x 這樣的式子，其中的 x 既不是未知數也不是變數，就是一個稱爲「元」的、可以像實數一樣運算的符號而已。令 $h=x^2-2x$，則 $h=0$ 稱爲方程式，x 就有了未知數的意義，然後可以玩「求根」的遊戲。當寫成 $h(x)$ 稱爲多項式函數或者二次函數，x 就有了變數的意義，然後可以玩「函數圖形」的遊戲。

國中課程教了「配方法」，得知 $x^2-2x=(x-1)^2-1$。國中生也多半知道，二次函數的圖形是「拋物線」，例如 $y=h(x)$ 的圖形就是「以 $(1,-1)$ 爲頂點，開口向上的拋物線」，如圖一。此時，函數在 x=1 處發生最小值 -1。

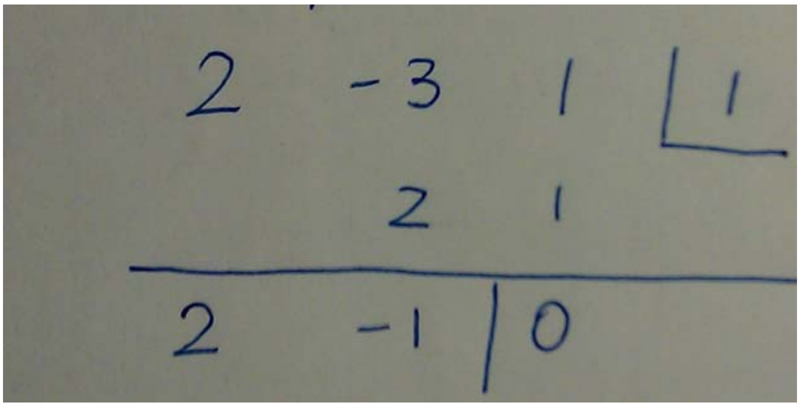
國中生知道如何用直式做多項式除法，並以橫式記成 $f\div p=q\ldots r$ 的形式。高中生必須近一不知道，除法橫式可以寫成等式 $f=pq+r$，稱爲**除法原理**。然後，高中生學了一種特殊狀況的簡易除式算法，就是當 $p=x-c$ 這種一次式時，有所謂的綜合除法（其中 k 爲實數）。例如當 $g=2x^3-5x^2+4x-2$ 而 $p=x-1$ 時，則 $g\div(x-1)$ 的綜合除法算式如下：





[圖一]

得到了商 $q=2x^2-3x+1$ 和餘 $r=-1$。所以寫成 $g=(2x^2-3x+1)(x-1)-1$。而高中老師多半還會教學生再做 $q\div(x-1)$，如



[訂正：上圖第二列最右邊應該是 -1。]

所以 $q=(2x-1)(x-1)+0$，代回 g 得到

$$g=\big((2x-1)(x-1)\big)(x-1)+1=(2x-1)(x-1)^2-1 \text{。}$$

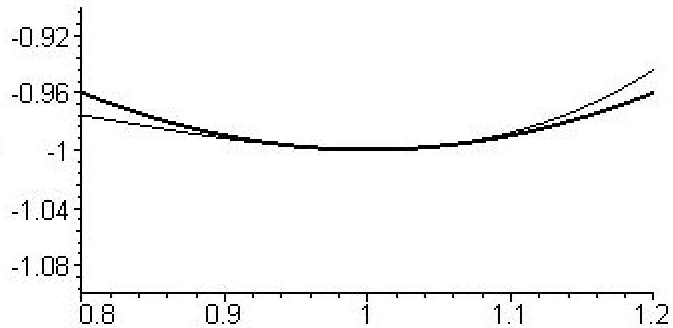
然而 $2x-1=2(x-1)+1$，所以

$$g=2(x-1)^3+(x-1)^2-1 \text{，}$$

稱為 g 在 x=1 處的**泰勒形式**或泰勒多項式。

高中老師都會教學生使用泰勒形式估計多項式函數的值。例如若要估計 $g(1.12)$ 至百分位，則因為三次項 $2(0.12)^3<0.01$ 可以忽略不計，故

$$g(1.12)\approx(0.12)^2-1\approx-0.98 \text{。}$$



[圖二]

如果知道泰勒形式的主要功能是估計多項式的「局部」特徵，就該將它寫成「升冪」排列；否則，課堂上教學生「降冪」和「升冪」兩種排列方式，就顯得空洞了。一般而言，多項式函數 $f(x)$ 在 x=c 處的泰勒形式寫成

$$f(x)=c_0+c_1(x-c)+c_2(x-c)^2+\ldots。$$

代入 x=c 立刻得到 $c_0=f(c)$。所謂「局部」就是 $x\approx c$。當 $x\approx c$ 時，不妨將 $x-c$ 想像成 0.1，則 c_0 可以視爲 $f(x)$ 的整數部分，而 c_1、c_2、…就「幾乎」是 $f(x)$ 的小數點下第一位、第二位、…。可見，越低次項越掌握了 $f(x)$ 的局部性質。

回到前面舉例的 g 和 h。改寫 g 在 x=1 處的泰勒形式爲

$$g(x)=-1+(x-1)^2+2(x-1)^3，$$

忽略三次項不計，則 $g(x)\approx(x-1)^2-1=h(x)$。參照圖二，$y=g(x)$ 在 x=1 附近的函數圖形（細線）跟 $y=h(x)$（粗線）很接近，是個開口向上的拋物線，而且在 x=1 處發生（局部）極小值 -1。

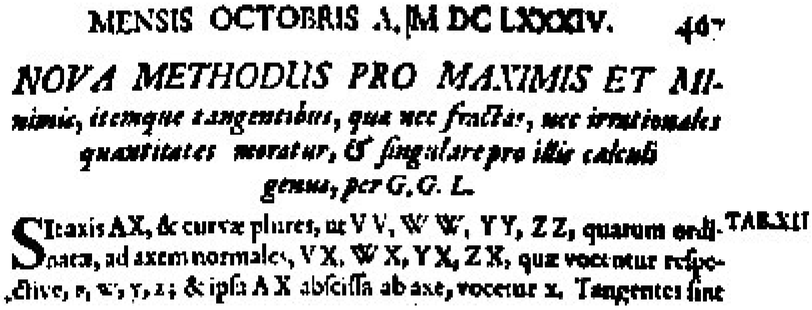
從以上經驗，讀者不難推論，連續使用綜合除法，就能將多項式改寫成泰勒形式。而如果 $f(x)=c_0+c_1(x-c)+c_2(x-c)^2+\ldots$，當 $c_1=0$ 但是 $c_2>0$，則 $y=f(x)$ 在 x=c 附近的圖形有如開口向上的拋物線，故發生極小值；而若 $c_1=0$ 但是 $c_2<0$，則 $y=f(x)$ 在 x=c 附近的圖形有如開口向下的拋物線，故發生極大值。

以上誠然是個了不起的發現，但是爲德不卒：我們要怎樣才能知道，哪裡去找那個 c，使得上述的 $c_1=0$ 呢？總不能一個 c 一個 c 地嘗試使用綜合除法去找 $c_1=0$ 的出現吧？

微分就回應了這個問題而得到圓滿的結果。讀者試著做 $x^n\div(x-c)$，會得到商 $q=x^{n-1}+cx^{n-2}+c^2x^{n-3}+\ldots+c^{n-1}$。因爲 c_1 是 $q\div(x-c)$ 的餘，所以 $c_1=q(c)=nc^{n-1}$。因此，找到使得 $c_1=0$ 的 c，就相當於求解 $nx^{n-1}=0$ 的根。我們說 nx^{n-1} 是 x^n 的微分，記作 $[x^n]'=nx^{n-1}$。運用除法原理，經過一番不太麻煩的推論，我們會得到

$$\begin{aligned}f'(x)&=[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0]'\\&=a_n[x^n]'+a_{n-1}[x^{n-1}]'+\ldots+a_1[x]'+a_0[1]'\end{aligned}$$

$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$


MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-
nimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales
quantitates moratur, & singulare pro illis calculi
genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi- TAB. XII
natæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respe-
ctive, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint

[圖三]

只要求方程式 $f'(x) = 0$ 的根 c，則 $c_1 = f'(c) = 0$，f(x)就可能會在 x=c 處發生極大值或極小值。剩下的工作是檢查 c_2 的值。對前面的 q 再做一次 $q \div (x-c)$，得到商 $x^{n-2} + 2cx^{n-3} + 3c^2x^{n-4} + \ldots + (n-1)c^{n-2}$，代入 x=c 得到

$$c_2 = \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2} = \frac{1}{2}f''(c)$$

其中 $f''(x) = [f'(x)]'$ 就是做兩次微分的意思。所以，如果 c 是 $f'(x) = 0$ 的根而且 $f''(c) > 0$，則 f(x)在 x=c 發生極小值，若 $f''(c) < 0$ 則發生極大值。

以上結論，就是萊布尼茲在西元 1684 年發表之論文的主題，如圖三。論文的題目很長（寫了三行多），大意是『新的找極大值和極小值的一般性計算方法』，倒數第二個字 calculi 是 calculus 的複數。後來 Calculus 就成了這套「新」計算方法的總稱，我們翻譯爲「微積分」。注意這整個論述都在高中生的多項式知識範圍內，無關乎極限。