科學月刊【數・生活與學習】專欄 101 年 1 月

從多項式揭開無窮的秘密

單維彰・100 年 12 月 15 日

去年 12 月，本欄示範如何使用高中一年級的「綜合除法」技術，導出多項式的微分公式及性質，並指出那套技術可以完整確定多項式函數圖形之極大、極小和反曲點發生位置，進而能夠徹底了解多項式函數圖形的各種特徵。這一套技術，大約就是萊布尼茲發表於西元 1684 年的第一篇微分學論文之內容；也就是這一篇論文，讓牛頓的朋友們指責萊布尼茲竊取了牛頓的發明，並且督促牛頓趕快發表他的成果。

作者想要闡述的，不僅是一個歷史故事。更高的期望是，提出高中數學課程設計的另一種可能。近十幾年來，微積分在科學、工程、管理學科的課程中出現的階段越來越早，提前帶學生進入微積分領域的需求也就越來越殷切。如果依照廿世紀由美國「主流」微積分教科書作者擬定的「標準」課程進度：先處理極限，並探討函數的連續性，然後以割線斜率之極限定義導數，則在高中階段勢必難以施行。這或許是過去半個世紀以來，高中階段的微積分課程始終裹足不前或欲言又止的原因。

這一套先墊基、再發展的進路，不但在高中窒礙難行，即使對大多數的大學生，也是非常可惜的：在學生體驗微積分的奇異美妙和令人震懾的威力以前，先被數學「嚴格性」累壞了身體，等到壯碩的美景終於陳現眼前，也無力欣賞了。

然而廿世紀的美國標準，在歷史上和地域上，都不是唯一的標準。回顧十七和十八世紀，當數學家（和物理學家）並不特別被「嚴格性」困擾的時候，他們已經用初等的工具和奔放的創意開發了那麼多令人驚豔的結果；其中一部份，例如前述多項式函數圖形的全部特徵，沒有道理不能讓高中生理解並應用。而嚴格性是在十九世紀才補上的，我們幾乎可以說，一直到「微積分大發現時代」結束之後，數學家才回頭收拾這些惱人的細節。如今，我們何不忽略廿世紀的美國主流課程，向更早的歐陸主流課程取經，爲學生設計一套（正確但尚未完整地）先發展、再墊基的數學課程呢？

現在，作者想要分享兩個他最深深陶醉的例子，與讀者一同欣賞前人「初等的工具和奔放的創意」的快樂。

西元 1665 年，22 歲就讀劍橋三一學院的年輕牛頓，首次揭開了一樁無窮級數的秘密。牛頓不曾爲此在部落格分享他的感受，但是就算我自欺欺人好了，請讀者想像這個年輕人當時那種不確定自己到底是觸碰了上帝或者撒旦的興奮和恐懼！

那一年，牛頓（很可能使用如上個月本欄所示的技術）知道單項式 x^n 可以寫成以 c=1 爲參考點的泰勒形式（這是後來取的名字，那位泰勒先生還要再 20 年之後才會出生）：

$$x^n = 1 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \ldots + c_n(x-1)^n \text{ ，}$$

而且他已經發現了計算係數c_1、c_2、…、c_n的「撇步」，也就是後來稱爲「微分」的技術：

$$c_1 = f'(1) \text{ 、 } c_2 = \frac{1}{2} f''(1) \text{ 、 } \ldots \text{ 、 } c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(1) \text{ 、 } \ldots \text{，}$$

其中 $f(x) = x^n$ 而且 $f^{(k)}(1)$ 表示 f 在 x=1 處的 k 次導數。這個結論，今天的學生可以用（最簡單形式的）鍊鎖律和比較係數法取得。而如同我們在上個月獲得的微分公式，牛頓也知道

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{、} f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \text{、} \ldots \text{、} f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)x^{n-k} \text{、} \ldots \text{。}$$

在以上各階導函數中代入 x=1 得到

$$f'(1) = n \text{ 、 } f''(1) = n(n-1) \text{ 、 } \ldots \text{ 、 } f^{(k)}(1) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \text{ 、 } \ldots \text{。}$$

因此，上述泰勒形式的係數就是

$$c_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \text{ ，}$$

牛頓認得出來，這就是所謂巴斯卡三角形上第 n 列的數（巴斯卡長牛頓 20 歲，稍早在 1662 年過世了），用今天的符號來寫，就是$c_k = C_k^n$ ，也就是說

$$x^n = 1 + C_1^n(x-1) + C_2^n(x-1)^2 + C_3^n(x-1)^3 + \ldots + C_n^n(x-1)^n \text{ 。}$$

其實，聰敏的學生一定知道，上述結果可以先用二項展開

$$(1+x)^n = 1 + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \ldots + C_n^n x^n$$

然後將變數 x 置換成 $x-1$而得到。但是，過度聰敏就可能和一個偉大的發現失之交臂。牛頓從幾個「個案」，大膽地推論$\left[x^r\right]' = rx^{r-1}$之公式，對任意指數 r 都是正確的，不必限定指數爲正整數；正如現在的學生也都會自動這麼推論的。那麼，如果規定

$$C_k^r = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!} \text{ ，}$$

其中 r 非 0 亦非正整數，k 是正整數，則C_k^r 恆不爲 0，而以上的二項展開就變成了無窮級數：

$$(1+x)^r = 1 + C_1^r x + C_2^r x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^r x^k$$

其中我們規定 $C_0^r = 1$ 。讀者不妨試試 $r = -1$ 和 $r = 1/2$ 的狀況。

西元 1735 年，28 歲在聖彼得堡新婚並遷入涅瓦河畔新居的歐拉 (Euler)，發現了無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。對大一微積分學生而言，有很多辦法可以證明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是一個收斂的無窮級數，這是一道基本的習題。但是，鮮少大學生知道這個收斂級數的和是什麼？

首先，歐拉說，因爲正弦函數 $\sin x$ 在 $x=0$ 、 $x=\pm\pi$ 、 $x=\pm 2\pi$ 、…處都是 0，所以這些數是它的「根」，因此

$$\begin{aligned}\sin x &= ax(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\ldots \\ &= ax(x^2-\pi^2)(x^2-2^2\pi^2)(x^2-3^2\pi^2)\ldots\end{aligned}$$ 。

所以

$$\frac{\sin x}{x} = a(x^2-\pi^2)(x^2-2^2\pi^2)(x^2-3^2\pi^2)\ldots$$ 。

而他也知道

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$ ，

其實巴斯卡已經推論過以上事實（但是形式不同，因爲他並沒有使用弧度量），而我們的高中生在學習了夾擠的觀念之後，也可以應用基本的三角關係了解上述事實。所以將以上等式的右側代入 x=0 之後，可以得知係數 a 的值，並重新整理它爲

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$ 。

另一方面，歐拉知道 $\sin x$ 的泰勒展開（參閱本欄 96 年 7 月〈從武士刀到毛瑟槍〉）是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

所以

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$ 。

接著，歐拉乘開等號的右側，整理之後，比較 x^2 項的係數，就得到了 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 。是不是一個令人瞠目結舌的過程？但是，在「嚴格性」的要求之下，這樣的程序不得出現在課程之內，它只能藏在某些人的秘密花園裡。