

## 向量在高中數學課程的份量

單維彰·102 年 2 月 10 日

去年底，教育部委託國家教育研究院為 104 年的十二年國教政策執行了「課綱微調」計畫，責令生物、化學、物理、地球科學和數學科，以 99 課綱為基礎，就「課程內容過量、過於艱深、課程安排的邏輯順序、橫向整合、縱向連貫、與大考中心考試內容的搭配等等困難與問題」進行微幅調整。此工作仍在進行中，詳情可查詢本計畫的計畫書；關於數學科的階段性工作，可參考今年 1 月 16 日筆者在高中數學種子教師研習會場上所做的報告 [1]。

在數學科工作小組的討論會議中，針對「平面向量」的相關課題做了最多也最熱烈的討論：經歷兩次會議，總共超過四小時的深入思辯。在「微幅調整」的框架內，最後反應在課綱調整文件內的份量或許很少，但是工作同仁卻在這番討論之中，揭開了一個值得大家從長計議的根本問題：『**向量究竟有多重要？是否為高中數學之必需課題？**』

此處所談的「向量」特指平面向量與空間向量，並不包含線性代數領域裡的一般維度向量。以向量作力學上的推演，例如力的合成，自古希臘以來就有跡可尋。但是，將向量視為某種代數體系，並以此系統解決幾何或物理上的問題，從數學發展史的角度來說，全部發生在十九世紀中葉以後，而在廿世紀初才形成我們今天在高中課本和微積分課本裡所知的形式。本欄曾經以三篇的份量，敘說這段歷史 [2]。

我們一向主張，在認知心理學有了新證據以前，我們總應該參照數學發展史來估計學習數學的認知發展歷程。所以，數學的發展歷程，至少對此教育問題提供了兩條線索：

1. 平面向量在歷史上是不存在的，其性質被複數涵蓋。平面向量可以說是為了教學的目的而發明的：為了有效教導空間向量，將其「簡化」至平面。
2. 空間向量發生得很晚；舉例而言，它比三角學晚了至少 300 年，比三角函數晚大約 100 年，也比單變數多項式函數的微積分晚了大約 200 年。

第一條線索讓我們反省：其實，使用平面向量解決的所有數學（幾何）問題，都有更「基本」的方法可以處理。平面向量之所以受教師歡迎，可能是因為它「威力強大」。從歷史角度來看，平面向量威力強大的理由很明顯，因為它相當於拿著未來的武器參與過去的戰爭。當然，授予更高效率的工具並非壞事，我們的確不必凡事從根本做起。可是，如果顧慮學生的認知能力，以及不同性向學生的專業取向，就不能純粹就效率而考量課程的設計。

在這種猶疑不決的時刻，讓我們先看看別人怎麼做吧。除了香港以外，我沒有最近的跨國比較資料，僅能引用民國 94 年 8 月 4 日出版的《中小學數學科數

學綱要評估與發展研究》報告書 [3]。這份文件做了美國加州、英國、新加坡、中國（北京標準）、韓國和日本的橫向比較。我們先做一個籠統的結論：這些國家（地區）**都沒有將向量列入必修的數學課程**。

英國和新加坡的學制與我們極不類似，在我們的高三、甚至高二，他們的部分學生就進入了大學預修課程（二年制初等學院），其學習內容都針對 A 級考試。至於初中的四年（或五年）則針對 O 級考試。所有 A 級考試的內容都不該被視為共同必修，而所有向量課題都列在 A 級，唯獨以下這些項目例外：使用向量  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ， $\overline{AB}$ ， $a$  描述平移、計算  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  向量的大小  $\sqrt{x^2 + y^2}$ 、用線段呈現向量、在共平面上使用兩向量的加減來描述所給予的向量、使用位置向量；這些是 O 級考試的內容。至於這些課綱描述所產生的真實教學與評量內容，還須要更精緻的考察。

香港本來和英國、新加坡類似，但是去年剛落實了『三三四』的制度改革，變得跟我們一樣了：初中三年、高中三年和大學四年；六年的中學結束後，參與「文憑試」（DSE: Diploma of Secondary Education）。在其初中課程（包括基礎與非基礎）與必修的高中課程裡，都沒有向量。初中非基礎課程有平面線段的分點公式，高中必修課程有直線與圓的關係，全都用方程式處理。

美國加州的必修課程沒有向量，將向量合併在《線性代數》選修課程裡。其教學要旨，直接就從空間向量進入一般維度，跟我們用向量來處理幾何問題的內容很不類似。日本也是在《數學 B》選修課程裡講述向量；課綱直接指述空間向量。至於教材如何引入？是否用來處理平面幾何問題？有待更精緻的考察。

韓國的向量課題全在《數學 II》高三選修課程中。高一的必修課程有平面線段的內分點與外分點公式、點到直線距離、圓與直線關係、兩圓位置關係，但是並未使用向量工具。

至此，似乎已經可以做一個結論：將向量列入數學必修課程的需求，沒有數學發展史的支持，也不雷同於國際間的一般見解。話雖如此，憑什麼我們就要跟隨別的國家而「自廢武功」呢？應用向量方法處理幾何問題的「傳統」，在我國數學課程中流傳已久。從民國 61 年版的教材開始，就有這樣獨立的一節課文，例如東華版第四冊 1-6。經過幾乎半個世紀，我國的數學教師可能已經練就一套獨步武林的向量功夫，怎麼捨得就這樣放棄呢？

能不能把向量的（必修）課程當作我國的數學教育特色？這個問題除了站在學科邏輯或教師立場思考以外，或許也該參考學生學習成效的證據。如果我國教師真的有獨到的功夫，使得高中生普遍掌握向量方法，則保留此課程，讓它成為我們的特色或「絕招」，其實是美事一樁。這方面的證據，還須要更進一步的研究調查。

至於前述第二條線索，已經沒有空間讓我們討論。我只想藉此提出一個問題：既然傳統以來，我們都可以把如此後期的空間向量放在高二必修課程裡，而且 99 課綱也按照歷史進程的建議，將三角學與三角函數拆成兩個學習階段，為

何不能重新考慮 17 世紀的單變數多項式函數微積分呢？造成微積分困難的，或許不是微積分的本質，而是 19 世紀的「嚴格性」。回到牛頓和萊布尼茲的時代，微積分或許並不比三角函數、複數、向量和矩陣更難理解。

#### 參考資料

- [1] [libai.math.ncu.edu.tw/~shann/article/1020116](http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/article/1020116) 數學課綱微調種子教師報告.pdf
- [2] 科學月刊【數·生活與學習】專欄 99 年 5 月、8 月、9 月。
- [3] [libai.math.ncu.edu.tw/~shann/article/report\\_full.doc](http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/article/report_full.doc)