平均律與對數律

單維彰

《科學月刊》97 年 9 月『數・生活與學習』專欄

關於音樂與數學的科普作品很多，這篇短文沒有能力展現一個大歷史，只想揭示一個議題：在西方文明的演進中，音樂的律制從純律到十二平均律的演進，正好相當於數學對於數的概念從有理數到實數的演進，也就是在測量上從精確分數到近似小數的演進，也就是在技術上從代數到分析的演進。為什麼這兩種智識文化的演進發生在同一段時期？原因可能是，當時在這兩種文化圈子裡的，是同一幫人。

我不確定所謂『禮樂射御書數』具體學習了哪些音樂和數學，也不知道中世紀歐洲教會學校 (cathedral schools) 四學科 (quadrivium：算術、幾何、音樂、天文) 具體學習了什麼音樂與數學。但是這至少說明了：曾經有一個時代，知識份子將音樂和數學視為基本學養的一部分。那個時代，比起我們熟悉的近代，還頗長久的。讀著音樂學的歷史，我們見到許多熟悉的名字：從畢達哥拉斯（有許多學生一直不相信，這就是畢氏定理據以命名的那位古希臘人），伽利略、刻卜勒、笛卡耳，一直到牛頓。這一點共通性，到了現在，特別是在台灣這個地區的當代，簡直是遙遠得透著不可思議的古怪。

據我個人受侷限的經驗認知，現在（台灣）的音樂與數學，只分享著一個共同的性質：為人父母者，都會在孩子們年少的時候，熱烈地專注於他們的音樂與數學教育；但是，如果他/她長到了青年，希望以音樂或數學當作一生的志業，則通常會遭遇強烈的反對。

音高是相對的。每個人都知道，只要你的音域夠廣，就可以從任何一個起音，清唱任何一首歌。這也是相對而言清唱比較簡單的原因：任何人都可以在淋浴的時候唱歌娛樂自己。所謂 KaraOK 伴唱機，對我來說是個諷刺的器材：根本不是它伴我唱，而是我伴它唱。人類的很多發明，到後來侷限了我們的自由，伴唱機就是一個。自從有了伴唱機，我就變成了五音不全的歌者。其實不是我自己五音不全，而是我熟唱某一首歌的起音與機器的不同，而且當我唱得起勁就臨時換了起音（所謂的轉調或升 key 或降 key），因此我唱出的音頻和機器播放的伴奏並不和諧。一個經驗老到的伴奏樂隊，可以隨時配合歌者的音頻而調整他們的伴奏，使得伴奏和主唱的聲音是和諧的。這是伴唱機辦不到的，所以我如果要唱一首和諧的歌曲，必須配合機器的「伴」奏而限制自己的音高。這就是為什麼星光大道的參賽者頻頻轉身謝謝樂隊老師的原因了。

雖然音頻可以（理論上）連續變化，就像我們的喉嚨或者小提琴，可以在某個範圍內發出任何頻率的聲音，但並不是任意頻率配在一起都是和諧的。這就

是為什麼會有音律的制度：律制。律制規定了，相對於某個基準的音頻，有哪些頻率的聲音是可以（或者說應該）用來製作音樂的。

然而，在某種程度上，什麼樣的聲音叫做「和諧」，不是基因內建的，而是後天養成的；就像什麼樣的男人叫做「帥」一樣，是社會（特別是強勢傳播媒體）的產物。這就是為什麼，音樂，可能僅次於語言，是最具有民族特色的文化產物。就算我們完全不懂，也能大體上明白地分辨印度音樂、阿拉伯音樂、國樂和西方音樂的不同。

總之，現在大部分人士在學校裡所受那聊勝於無的音樂教育，都是歐洲的主流音樂。所以，我們也只能用這一套術語來溝通本篇所要談論的概念。關於「和諧」，一個跨越民族的共識是：頻率為 1:2 的兩種聲音是和諧的。兩倍頻率的音稱為「高八度」的音。所以，如果一種律制在 [c, 2c) 頻率範圍內制訂了幾種頻率的聲音，則 [2c, 4c) 就自然規定了它們高八度的聲音。同理，[c/2, c) 就規定了低八度的聲音。在頻率上，它們是指數關係：往上是 2 倍，4 倍，8 倍…，往下是 1/2 倍，1/4 倍，1/8 倍…；但是在聽覺上，它們是「平移」關係：這就只能意會不能言傳了。頻率並不需要無止境的升高或下降，因為人的耳朵大約只能聽到 20Hz 到 22,000Hz 之間的聲音。

所以，就像數學的「以簡馭繁」思想，音樂的律制可以只在「八度音」的範圍內討論，也就是在 $c \le x < 2c$ 的範圍內挑選幾個頻率出來制訂一組音律。音律的個數，少的至少有 5，多的多達 43。所謂平均律，就是相鄰兩個頻率的比值皆相同。例如只挑選五個頻率：$c \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < 2c$，則平均律要求 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \frac{x_5}{x_4} = k$。如果知道 x_1 和 x_3 而求 x_2，其解就是 x_1 和 x_3 的幾何平均 $\sqrt{x_1 x_3}$。那位著名的伽利略的父親，文森左 (Vincenzo Galilei, 1520--1591)，從古希臘數學典籍中發現了它的幾何解法，就是中學教師都會的，利用一個半圓作幾何平均的高。但是，如果給定 x_1 和 x_5 而要求中間的 x_2，x_3 和 x_4，可就不簡單了。因此，早期的律制都不是平均律。

早期的一種律制稱為純律 (Just Intonation)，源自於畢達哥拉斯學派對於整數近乎神秘的崇拜，用相鄰的整數比值「定義」和諧的聲音。例如，當 c 是 Do 的頻率，則純律以 c 的 3/2 倍作為 Sol 的頻率，也就是基本的五度和諧。4/3 倍是 Fa，它是高八度 Do 向下五度的和諧音，也就是 2÷(3/2)=4/3。5/4 倍是 Mi，它是三度和諧。而 Sol 向上五度的和諧頻率是 (3/2)*(3/2)=9/4=2×(9/8)，降八度回來，規定 9/8 是 Re。而 Mi 的五度和諧頻率是 (5/4)*(3/2)=15/8，這是 Ti。文森左時代的歐洲知識份子，開始思考它們之所以和諧的物理原因，也開始用數學方法探究為何它們缺乏內部一致性。例如 Re 的五度和 Fa 的三度都應該是 La，從前者定義，La 的諧頻率應該是 (9/8)*(3/2)=27/16，從後者定義卻是 (4/3)*(5/4)=5/3。純律選用 5/3，因為它的五度和諧頻率是高八度的 Mi：(5/3)*(3/2)=5/2=2×(5/4)。

從 La 這個小小的裂縫，再加上其他和諧音和半音觀念的出現，使得純律的

神聖性受到了懷疑，就像那個時代的神學受到科學的懷疑一樣。後來，文森左終於勇敢地提出他的看法是：整數比值根本是神話。天下沒有真正 1:2 或 2:3 的兩根弦，也就沒有真正 2 倍或 3/2 倍的頻率，一切都是近似而已。在微小的誤差內，人根本聽不出來差異。這就是我們今天以實數做測量的觀念：給定一個單位長，剪裁一條長度恰好是 2 的繩子，與剪裁長度恰好是 $\sqrt{2}$ 的繩子，同樣是不可能的。

解決前述平均律之連比問題的一般性數學概念，是對數。對數是納皮爾 (John Napier, 1550—1617) 的智慧產物；配合著對數，十進制小數和實數的概念也跟著成形。到了梅仙尼 (Marin Mersenne, 1588—1648) 的時代，十二平均律 (12-TET: Twelve-Tone Equal Temperament) 的概念已經出現。它把 log(c) 和 log(2c) 等分 12 段，再取指數還原，而得到一段八度音之內的 12 個全音與半音。梅仙尼不是數學史上的一哥級人物，以至於他的譯名非常混亂，包括莫仙尼、梅森林、梅神父等等，經常讓人以為是不同的人。這位天主教神父是當時歐洲知識份子的軸心人物，在他建立的菁英通訊網內，包括了笛卡耳、伽利略和費瑪。2^p-1 這種形式的質數以他命名，張鎮華教授和黃文璋教授各有一篇介紹這種質數的科普經典之作 [1,2]。

鋼琴是完美對應十二平均律的樂器，在它的一段八度音之內，有黑白鍵共 12 個，相鄰兩個音的頻率比值都是 $2^{1/12}=\sqrt[12]{2}$。若 c 是 Do 的頻率，則升 Do 的頻率是 c 的 $2^{1/12}$ 倍，Re 是 $2^{2/12}$ 倍，依此類推。音高是相對的，任一個頻率都能當作基準。不過，現在的所謂 A440 國際標準規定：中央 C 之八度內的 La 頻率是 440Hz。所以中央 C 的頻率滿足等式 $c\times 2^{9/12}=440$，大約是 261.6Hz。根據這個律制，La 的頻率應該是 Do 的 $2^{9/12}$ 倍，無理數 $2^{9/12}$=1.681⋯ 和 5/3=1.666⋯ 或 27/16=1.687⋯ 的相對誤差都在「五分」以內，也就是 5% 以內，人耳聽不出來。同樣地，Re 的頻率是 Do 的 $2^{2/12}$=1.122⋯ 倍，這個無理數和純律 9/8=1.125 的相對誤差也在五分以內。

儘管十二平均律是目前世界上最強勢的律制，但它畢竟是某個文化在某段時期發展出來的一種律制，既不能詮釋全世界的音樂也未必是終極的結論。我想要邀請讀者一同欣賞的，並不是這個律制本身，而是十七世紀前後，西歐的知識份子社群，在全面討論科學與藝術問題的時候，所發展的共通思考方法與解決問題的哲學。數學，是反映這種哲學的具體方法。

[1] 張鎮華，完全數與莫仙尼質數，《科學月刊》1972 年 3 月號。
[2] 黃文璋，完全數與梅仙尼質數，《數學傳播》1997 年 9 月號。