科學月刊【數・生活與學習】專欄 **9803**

考試領導教學了嗎？

單維彰 98 年 2 月 13 日

『考試領導教學』原本是一個負面的概念，有時候甚至被指爲罪大惡極的教育元兇。按照這個邏輯，負責考試的單位也就似乎背負了不怎麼值得恭維的名譽。而我前面說了「原本」，可見在此要提出一點異議。其實，時光荏苒社會變遷，事情本來就是此一時也彼一時也，局勢的變化是常態而不值得大驚小怪。我最近發現（或者反省）的是，在排列組合的數學課題方面，大學入學考試的題目是很合理的簡單明白，反而高中的數學教室裡，教得太難，高中的評量測驗，考得太難。在這方面，考試領導教學或許是個正面的概念。

因爲工作的需要，我挑出民國 95 年以來的學測、數學甲、數學乙考試中關於排列組合的題目，包括那些隱含在機率、遞迴、數列規律性裡面的題目，檢視它們所需要的概念與技巧。結果發現，這些題目都是那麼地「基本」，基本到讓我感到「驚訝」的程度。

我需要對讀者告白，也許就像很多高中學生一樣，排列組合是我當年最害怕的課題。我總是抓不到思考的方法，弄懂了一題，做下一題又完全失去了方向。就算做了題目，也總是不確定自己的計數方法，有沒有重複計算？有沒有遺漏？它不像其他數學題目，只要抓到了合邏輯的方法，按照邏輯去計算，小心不要算錯，就有信心得到了答案。可是，在排列組合方面，就算有了「一個」合邏輯的想法，計算也沒有出錯，還是不能確定答案對不對？因爲一個合邏輯的想法並不保證囊括了所有的可能，所以計算可能有遺漏。究其根本，原因就在於我並沒有真正學到排列組合的思考方法。

這個情況並沒有在大學的數學教育中獲得改善，因爲我在大學時期刻意避開了所有離散數學的科目。等到爲了去美國留學而準備 GRE Subject (主科) 考試時，做官方的模擬考題，發現總有一定比例的排列組合題目，而那些題目顯然是我的罩門。但是，我雖然害怕那些題目，卻也不陌生：我感覺高中時代所學的排列組合就足以對付美國的 GRE 數學本科考試（這個考試的對象是主修數學的大學畢業生）。於是我找來一本高中數學參考書，研讀裡面的題型。事實上，只研讀了大約 2/3 就確定夠用了。憑著這一點臨時抱佛腳的短期記憶，我做出 GRE Subject 考試中所有排列組合的題目（其他題目我本來就不擔心），獲得了 99% 的成績等第。過了這一關之後，我又再也沒有思考過排列組合的問題。

但是，以我這種排列組合的破架式，戰戰兢兢地檢視近年大學入學考試題目的時候，卻發現我全都會做！難道是我後來變聰明了嗎？也許吧。但是我認爲，歲月雖然多少給了我一點點智慧，卻不太可能自動帶給我排列組合的天分。事實是這些題目設計得非常「合理」，而我認爲合理的原因如下。

1. 如果題目的形式並非例行的形式，答案都夠小，小得可以逐一列舉。

2. 如果答案頗大，不適合列舉而需要計數技巧，則題目都是明顯可以應用基本加法原理和乘法原理的形式。

那些夠小的答案，籠統地說，都是小於 25。而所謂加法或乘法原理，是那些經歷了歲月而還可以使用的技巧，因爲它們是大觀念，並且對應集合的聯集、交集與乘集的觀念，所以是一般人能夠了解而不必刻意背誦的觀念。

有些題目簡單得像是數學「閱讀測驗」。我過去在本欄中談過「數學溝通」的概念與評量實例，在這個觀點之下，我非常欣賞大考中心的閱讀測驗題型。以下是一個例子。

> 一個「訊息」是由一串 5 個數字排列組成，且每位數字都只能是 0 或 1，例如 10010 與 01011 就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串 10010 與 01011 在第 1, 2 及 5 三個位置不同，所以訊息 10010 與 01011 的距離為 3。試問以下哪些選項是正確的？(95 數乙)
>
> (1) 與訊息 10010 相距最遠的訊息為 11101
>
> (2) 任兩訊息之間的最大可能距離是 4
>
> (3) 與訊息 10010 相距為 1 的訊息恰有 5 個
>
> (4) 與訊息 10010 相距為 2 的訊息恰有 9 個

選項 (1) 和 (2) 並沒有計算，單純是數學定義的閱讀測驗。選項 (3) 和 (4) 可以用組合公式計算 $C_1^5=5$ 和 $C_2^5=10$，也可以列舉。只有選項 (4) 稍微需要組合的觀念和技術。就命題技巧而言，這一題稍微不仁慈的地方是，故意讓這個複選題只有一個答案 (3)，學生容易動搖信心而犯錯。

下面這一題是很不尋常的題型，也有文字理解的負荷，但是數量甚少，我邀請所有害怕排列組合，或者忘記所有公式的讀者，憑著常識列舉所有的狀況（我是這樣解題的）。

> 趙氏與錢氏兩對夫妻，以及孫先生、李先生圍坐一個六人座圓桌吃飯，其中趙先生和孫先生已在兩個相鄰的位置坐定。若限定夫妻不得相鄰，則其他四人就座的方法共有幾種？ (97 數乙)

這個題目只有四個座位要安排，答案只有 10，根本不需要任何公式。在技巧上，因爲趙太太已經有一個位子不能坐，由她的座位來討論比較方便。在三個不與趙先生相鄰的座位上，依序討論若趙太太坐下，其他三人入座的可能性，再以加法原理加在一起，就是答案。

在觀念上，上題或許並不那麼單純，學生還必須了解環狀排列的特徵，不論趙先生和孫先生繞著圓桌坐在哪兩個位子，都不會增加不同的就座排列。而趙先生和孫先生的左右關係也不該讓答案乘以 2，因爲那只是順時針排列或逆時針排列的兩種看法而已。可是，這些障礙，都可以在列舉的過程中看得出來，不必背誦任何公式。話說回來，要求考生在緊張氣氛下思考，並不見得公平。

以下範例，是個答案頗大不能列舉，但是形式合理的題目。

> 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後

四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如 AA1234, AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234, AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為何？(97 學測)

(1) 25×9^3 (2) $25\times 9^2\times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999

這一題所需要的觀念，包括 (a) 英文字母有 26 個，(b) 字母與數字的組成要用乘法原理，和 (c) 數字要用加法原理扣除不可以的情況，亦即 ?44 之中?有 10 種可能，故共有 $25\times(1000-10)=25\times 990$ 種車牌號碼。

但是，在教學現場，老師用什麼題目來評量學生呢？舉兩個典型的例子：

1. 三個人坐一排九個位子，兩兩不相鄰的坐法共有幾種？

2. 請問 $x+y+u+v\le 25$ 共有幾組正整數解？

這兩題，有沒有勾起很多人不願再想起的惡夢？大學入學考試，已經不考這種問題很久了。按照近年考題設計的理念來看，將來若有這種類型的題目，也會設計得數量夠小讓人可以列舉。對照近年的大考題目，各位有無跟我一樣的想法，就讓『考試領導教學』吧。