科學月刊【數・生活與學習】專欄 9811

高中課程需要怎樣的微積分？

單維彰・98 年 10 月 12 日

過去討論這個問題，辯論的焦點似乎是：高中課程有沒有必要為大學的微積分課程做準備？該做哪些準備？而本篇想要提出另一種意見，請各方指教。我認為，**高中的微積分課程，不是為了大學微積分課程做準備，而是為了銜接微積分以外的其他專業科目做準備。**

以下，我先論述高中與大學之微積分課程銜接性問題，是這整個議題中的次要問題。然後舉出幾個教材設計的建議。最後提出一些證據，以支持主題的意見。

就目前的情況而言，大學的微積分課程基本上自給自足，高中課程中有或沒有微積分，於大學微積分課程無關痛癢。不論在大學還是在高中導入微積分，其基礎課程，即所謂的「微積分先備課程」(Pre-Calculus)，包括代數基本操作、根號形式的實數運算、以及基本函數（多項式函數、指數與對數函數、三角函數）的認識等等，本來就已經存在於高中的前兩年課程中。如果這兩年的教學成效不彰，不論是在高中或大學導入微積分，學生都將面臨同樣的障礙；如果高中前兩年的數學教育成功了，則不論是在高三或者大學導入微積分，學生的基礎都是一樣足夠的。

實際上，現在的主流意見中，幾乎沒有人主張在高中開始嚴格基礎的微積分課程，也就是包括ϵ和δ的極限定義、並且嚴格證明微分與積分均值定理的微積分。所以，我也略過這方面的討論，而直接假設，大家談論的高中微積分，是比較訴諸於直覺的、著重於實用性的微積分。

反對者反對的正是這一點。他們擔心，高中微積分的直覺式作法，帶給學生先入為主的錯誤觀念，以後（例如進入大學微積分課程之後）修改不過來。我認為這是教材和教法在設計上可以解決的技術性問題。如果高中所學維持在「正確但不完整」的水準上，則以後將會「擴充」知識而不必「修改」認知，就沒有修改不過來的問題。

舉例來說，如果高中以為所有函數都可以微分，那就是錯誤。但是，知道多項式函數都可以微分，則是正確但不完整的知識，將來還可以擴充。

而且，直覺並不等於錯誤，也不一定要訴諸於神秘的經驗。不當的教材或教法，才會導致錯誤的認知。例如，在$\frac{0}{0}$形式的極限問題上，只有在處理三角函數的微分才真正需要，可以用查表計算，或者透過電腦的圖形呈現、數值呈現，乃至於以圖形展現的夾擠定理，獲得「極為合理」的論斷，而不一定需要極限的定義。平方根的導數，可以由平方乘法公式轉換，而變成函數的求值來避開極限問題。至於多項式的導數，則根本可以避開$\frac{0}{0}$的極限形式，因此可以提早在高一就

導入。

微分和積分均值定理，都可以用「反證法」得到合理的認識。很多教師都知道這種說法。積分均值定理甚至可以有教具，在許多藝品或禮品店可以買得到。用兩塊玻璃板夾著一個薄層，裡面封存密度不同、顏色也不同的黏稠液體。譬如藍色較重，透明較輕。則靜止平放時，時可以看到一塊長方形的藍色面積；適當搖晃之後可以看到藍色的曲線。由面積的出入相補（其實是物質不滅的直覺），可以相信曲線下的面積就是靜止時的長方形面積，定義靜止時的高度爲曲線的平均值，則平均值必定在曲線的最高與最低點之間。使用這個「教具」，甚至可以劇烈搖晃產生不連續的函數，藉此提醒學生，當不連續發生時，前述的結論可能不正確。（當然，這個觀念，在高中應屬選修。）

在高一教多項式時，只要再適當地弱化多項式的代數性質（比如說虛根與代數基本定理），就會有時間，以現有的技術，導出切線與導數。令 $f(x)$ 是一個多項式函數，通過 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 兩點的割線是 $y = q(b)(x-a) + f(a)$ ，其中 $q(x)$ 是 $f(x) \div (x-a)$ 的商式。這是高一課程中已經會做的事（綜合除法）。定義通過 $(a, f(a))$ 的切線，就是當 $b = a$ 時的割線；最好能用電腦動畫或互動操作來加強認識。這是「正確」的切線定義，卻不必透過極限操作，切線方程式就是 $y = q(a)(x-a) + f(a)$ 。一般而言， $q(a)$ 可以做兩次綜合除法求得。但是，當 $f(x) = x^n$ 是單項函數時，由乘法公式就知道 $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ ，所以 $q(a) = na^{n-1}$ ，這就是導數公式了。

如果高一的數學課程爲學生準備好多項式的微分技術，則高二的「自由落體」和「拋射物」物理問題，就能放在牛頓的架構下完整地處理。那時候，可以由物理教師做切線斜率和速度的連結，他們並不需要真正做「積分」，而只要做「反微分」即可。例如當水平加速度是 0，則由 $\ddot{x} = 0$ 反推 $\dot{x} = v_0$ ，再反推 $x = v_0 t + x_0$ 就是水平的等速運動了。這是很多物理教師一直採取的教法，而數學課程卻在這些重要的問題上缺席了。

高一學生的工具還不夠，最好學到多項式函數的導數即可，足夠高二的物理課程來應用。更多的微積分可以在高三發展。至於該發展到什麼程度？我認爲不必考慮大學的微積分課程，反正他們一定會詳細地從頭講起。高中的微積分，是爲了大一上學期，在微積分以外的專業課程而準備的。學生在某些專業課程內已經需要微積分，其技術或概念的程度不一，卻是按照現行的大一微積分課程進度而言，來不及配合的。那些大一微積分課程來不及配合、卻在專業課程中引用的部分，就是高中課程需要提供的基礎。

許多人可能都在大一物理課程裡，有過這種慘痛的經驗；物理教授經常不理會微積分課程的進度而自在地使用微分或積分表徵。那些初期的物理課程，即使用到微分或積分，通常也在符號和概念的階段，其實並不難。但是如果學生完全沒學過，即使只是符號也能造成學習的障礙。我認爲高中微積分課程可以彌補這個斷層，也理應負起這個責任。

爲了考察上述斷層的份量與內容，我請高晟鈞先生從 17 所公私立大學中，

找出分發入學採計數甲或者數乙的學系（略過各種「不分班」的組織，因爲這些學生附在某系就讀），蒐集所有這些學系在 97 學年第一學期的課表，找出微積分以外的主要共同科目。然後，以網路訪查或電話詢問等各種管道，調查該科目的指定教科書。最後確定了四本最爲常用的物理、化學、統計和經濟學教科書。我們逐頁檢查這些教科書在大一上學期授課範圍內的內容，把需要微積分之技術、符號或概念處標記出來。

其中物理最早也最多使用微積分，並不意外。在課程進行到 10%處就引入黎曼和及定積分，在大約 40%處就遇到指數和自然對數的微積分運算，然後就會遇到向量式、參數式和極坐標了。經濟學雖然對微積分操作技術的需求較低，但是從課程的 12%處即開始以微分觀念解釋「邊際」分析，此後大量使用導數觀念；進行到 50%處，還有雙變數函數的全微分。化學課本大約從 30%處開始使用導數，幾乎也在同時需要對機率分佈函數的理解，但是直到最後的 15%才開始大量使用定積分以及指對數。大一的統計學則是在課程的 2/3 處才開始出現定積分，用來表述分佈函數與機率的關係，同時也出現了正規分佈，所以用到指數函數。

經濟學和統計學課程，大多出現於「社會組」學系，可見社會組的高中生，若完全不學習微積分，恐怕對他們不利。化學屬於「自然組」課程，可見自然組的高中生，若完全不懂機率分佈的意涵，也是不太好的。而考察這些「暢銷」教科書所需的微積分內涵，將可當作下一次討論高中數學課程綱要的參考指標，作爲微積分內容取捨的判斷依據。