數學「標準答案」

單維彰

讓我們來玩遊戲吧。

三天前，我收到一位設計師朋友寄來的「數學挑戰」。等我把那個「挑戰」轉寄給數學圈內的朋友（高中數學教師、博士班學生等），才發現我的消息實在很不靈通，原來這個問題已經在網路上流傳很久了。而圈內朋友大概都覺得不值一哂，好心地不要浪費我的時間，所以沒有轉寄給我。

恰好相反，我很喜歡這個題目，它可以讓我借題發揮。題目的原文是這樣的：

1, 2, 6, 42, 1806, ____???

在這串數字的前面，還有一些挑釁和誇張的話，我就不轉述了。任何在台灣受教育的人，都看得懂這種沒頭沒腦的問題，就是要「依規則」填入 1806 的下一個數。按國中數學的教導，題目給了一個數列的前五項：$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=6$, $a_4=42$, $a_5=1806$，按照數學課的「潛規則」，學生被期望要根據前五項看出規則，然後依規則算出第六項，也就是 a_6。

幾乎每一位受過完整大學部數學教育的受試者，都以「秒殺」的速度解了此題。大家看出來的規則是：$a_{n+1}=a_n\times(a_n+1)$，而$a_1=1$。這是一種數列的「遞迴關係」，讀者若還有興趣，可以參照本欄的〈遞迴的兩個層次〉（2009 年 4 月號）。

我們可以用前五項來「驗證」這個規則：

$a_1=1$

$a_2=a_1\times(a_1+1)=1\times2=2$

$a_3=a_2\times(a_2+1)=2\times3=6$

$a_4=a_3\times(a_3+1)=6\times7=42$

$a_5=a_4\times(a_4+1)=42\times43=1806$

所以「答案」就是$a_6=a_5\times(a_5+1)=1806\times1807=3263442$。據說網路上還傳著一份名冊，列著解出此題的名人堂。

就這樣。遊戲結束了嗎？當然沒有，我才正要開始。這種問題，與其說是「數學」問題，不如說是「心理」問題：讀者要猜心，猜命題者的心。而台灣的學生，很不幸地，在數學考試上，學習了高明的心理學猜心術。所以，上述問題很容易就解了。而我們也太習慣，數學問題都有「標準答案」；唯一的標準答案，當然。

可是，只要是滿足前五項（通得過驗證）的規則，都是規則。誰有權力武斷地說，一個規則是「正確」的，而另一個規則就是「錯誤」的呢？

就這個問題而言，恰好有另一個頗有趣的規則，也滿足前五項。定義nextprime（n）為：比n大的最小質數。例如nextprime（1）＝2，nextprime（10）＝11，nextprime（11）＝13。現在，很湊巧地，nextprime（2）＝3，nextprime（6）＝7，nextprime（42）＝43。所以，題目中的$a_1,\ldots,a_5$恰好也滿足這條規則：

$a_{n+1}=a_n\times\text{nextprime}(a_n)$

按照這個規則，$a_6=1806\times\text{nextprime}(1806)=1806\times1811=3270666$。所以，這是不是

「另一個」答案？那麼，哪一個才是「標準答案」？（事實上，應該有人會同意，第二個答案比較「優雅」吧？）

讀者或許認為，這一題運氣不好，所以有兩個答案。我接著要說，這種題目都有無窮多種「合理」的答案。對細節沒興趣的讀者，可以略過以下這段技術性的敘述，跳到下一段。

我們在高中一年級學過：六個點可以決定唯一的五次多項式。令 $f(x)=c_5x^5+c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$，有六個未知的係數 $c_0,\ldots,c_5$ 待決定。在「不退化」的情況下，如果規定 $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2, f(3)=6, f(4)=42, f(5)=1806$，則這六個條件可以決定那六個係數。得到

$$f(x)=\frac{547}{40}x^5-\frac{407}{3}x^4+\frac{3781}{3}x^3-\frac{2020}{3}x^2+\frac{3237}{10}x$$

如果我們說，題目中的數列滿足規則 $a_n=f(n)$，也是可以「驗證」的。所以，它也是一條「合理」的規則，沒有人能夠說它「錯」。按照這個規則，$a_6=f(6)=10302$。讀者應該發現，我沒用到 $f(0)$。其實，我可以令 $f(0)=k$，得到的五次多項式函數是

$$f(x)=\left(\frac{547}{40}-\frac{k}{120}\right)x^5+\left(-\frac{407}{3}+\frac{k}{8}\right)x^4+\left(\frac{3781}{8}-\frac{17}{24}k\right)x^3+\left(-\frac{2020}{3}+\frac{15}{8}k\right)x^2+\left(\frac{3237}{10}-\frac{137}{60}k\right)x+k$$

讀者不信可以自己驗證：$a_1=f(1)=1, a_2=f(2)=2, a_3=f(3)=6, a_4=f(4)=42, a_5=f(5)=1806$。

按照前面那個 $a_n=f(n)$ 的規則，$a_6=f(6)=10302-k$。你可以用 k 設計任意一個你想要的答案，當然包括「標準」答案（取 $k=-3253140$ 即可）。而這個規則完全「合理」，就理性而言，沒有一個規則「優於」另一個規則。

所以，任意一個只給前面少數幾項，而要學生回答下一項的問題，都是（在數學上）無聊的。這就是為什麼，國中和高中的數學教科書，都不應該出現這種問題（除非能夠容許所有說得出理由的答案）。這也是為什麼，在指考和學測等國家級考試中，都沒有這種題目。


一張方形的紙，剪掉一角，還剩幾個角？

讀者可以審視近年的考題，或參閱〈遞迴的兩個層次〉，舉凡遞迴關係的題目，都有一個明確說明的「程序」；而遞迴關係的數列，是由程序產生的，不是像這個題目沒來由地規定。

中央大學中文系有位康教授，是我的「情同姊姊的師長級朋友」。她的父親是數學界前輩，曾在師大擔任數學教授（可惜我沒機會受教）。康教授聊天時提到，她從父親那裡學到關於數學的唯一一件事，就是「數學沒有標準答案」。這真是一個了不起的教育。（可嘆的是，在台灣的教育環境下，這概念卻害得康老師在學校裡考不好數學。）她慷慨地轉述了康老教授的家傳例題：「一張方形的紙，剪掉一角，還剩幾個角？」如果你以為「5」是標準答案，請再想想。我很榮幸地繼承了這個問題，它變成我在科普演講及教師研習中，最常當作範例的問題。

單維彰 任教中央大學數學系