科學月刊【數‧生活與學習】專欄 9902

韓信點兵與傳統的數學教育典範

單維彰‧99 年 1 月 10 日

我要講一個可能大家都知道的故事。重點不是這個故事，而是我在後面要表達的意見。這個故事只需要簡單的數學，卻又不會太簡單（才能讓讀者有比較深刻的感受），恰可以爲我的意見提供一個範例。

大家可能都知道所謂的**韓信點兵**問題：命不知爲數多少的士兵，三人一伍排好，看看剩下幾個人；馬上又叫他們五人一伍排好，看看剩下幾人；再命令他們七人一伍排好，看看剩下幾人？（好像在玩某種「大風吹」遊戲。）然後，有經驗的將領或師爺（通常是後者），稍微沈吟，就能「很神奇」地說出士兵的總數。這樣顯一顯本領，讓眾人震懾佩服，也是領導統御的手段啊。

以上作法並不能決定唯一的答案。所以將領或師爺還需要老到的經驗，估計總數大約多少，再配合以下算法，做一個調整。此處，先以《孫子算經》裡面的例題作爲韓信點兵問題的典型：

> 今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，
> 問物幾何？（《孫子算經》卷下第 26 題）

順便一提，此「孫子」並非《孫子兵法》的那位孫子。《孫子算經》可能比《九章算經》稍晚，至少也是在漢朝了，而《孫子兵法》是東周時期的典籍。用今天的術語，並且更精確地命題，這一題的意思是：

> 若 n 是一個正整數，已知 $n \div 3 = q_3 \ldots 2$，$n \div 5 = q_5 \ldots 3$，$n \div 7 = q_7 \ldots 2$，
> 問滿足此條件的最小正整數是多少？

其中 $n \div 3 = q_3 \ldots 2$ 就是 n 除以 3 得到商數 q_3 和餘數 2 的意思，而那又等於是說 $n = 3 \times q_3 + 2$ 。

《孫子算經》先演示一個解法。他說，「三三數之剩二」就放 140，「五五數之剩三」就放 63，「七七數之剩二」就放 30；把它們加起來，得到 233。再減去 210 就是答案，亦即 23。

真是神奇的孫子傑克。爲什麼呢？先別急著問。接著他寫了這種題型的一般解法：

> 凡三三數之剩一，則置七十，五五數之剩一，則置二十一，七七數之
> 剩一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

用今天的符號和術語來說，就是

> 只要是三三數之剩 r_3 ，五五數之剩 r_5 ，七七數之剩 r_7 ，則
> $(r_3 \times 70 + r_5 \times 21 + r_7 \times 15) \div 105$ 的餘數就是最小正整數解。

爲了要牢牢背住公式裡的四個數，自古傳下一首詩歌：

三人同行七十稀（ r_3 乘以 70）

五樹梅花廿一枝（ r_5 乘以 21）

七子團圓正半月（r_7 乘以 15）

除百零五便得知（除以 105）

各位讀者是否覺得以上「教學」結構非常眼熟？從一個特殊的例題開始，以一個特殊的公式解決它，給一套背誦公式的口訣，也許再做兩道練習題。所以，只要是這一型的題目，都可以「速解」。這不就是常見的所謂參考書或者補習班教法嗎？不但頗受學生歡迎，部分的老師也自翎這是「有效」的教法。

我並不要依慣例批評這些參考書或老師們。我想要表達的意見是，其實，這種教法，正是**中國固有數學教學的典範！**多少的老師、作者和學生，不知不覺地繼承了中國的這項傳統而不自覺？**文化入人之深**，正是表現在這種瞬忽微渺的不察之處。現在「主流的」數學教法，也就是注重前提，考究原因，按邏輯嚴格演繹的教法，是西方承自希臘數學的典範；它是外來的，並不是我們的傳統文化中所固有的。

也許四百年前翻譯《幾何原本》的徐光啓，是第一個認識西方數學典範的中國人，他也是第一個指出其優越性的中國人。從他開始，歷經了三百年，才讓中國的知識份子普遍認識到，中國固有的數學教學典範有些缺憾，而引進西方的數學知識以及教學典範。但是，這個數學教育的「革命」，至今只有一百年左右，而隱藏在大眾民間、有兩千年歷史的傳統，仍然無聲無形地操弄著我們的思考習慣。要以一百年的耕耘，翻犁兩千年的土壤，到底有多難？

真的很難。這是我們全體數學教育工作者，需要透徹地認識，並且時時警惕的啊。

意見說完了，讓我們探討原因吧。一個關鍵的知識是，如果 $m_1 \div k = q_1 \ldots r_1$ ，$m_2 \div k = q_2 \ldots r_2$ ，則 $r_1 + r_2$ 「基本上」就是 $(m_1 + m_2) \div k$ 的餘數：如果 $r_1 + r_2 < k$ 則它就是餘數；如果 $r_1 + r_2 \ge k$ ，減去 k 就是餘數了。理由是，因爲 $m_1 = q_1 \times k + r_1$ ，$m_2 = q_2 \times k + r_2$，所以 $m_1 + m_2 = (q_1 + q_2) \times k + (r_1 + r_2)$ ，如果 $r_1 + r_2$ 沒有超過 k，它就是 $(m_1 + m_2) \div k$ 的餘數；如果超過了，那也必定不會超過 $2k$，因爲 $m_1 + m_2 = (q_1 + q_2 + 1) \times k + (r_1 + r_2 - k)$ 所以 $r_1 + r_2 - k$ 就是餘數。

如果有兩個數，叫它們 m_3 和 m_5 。如果 m_3 被 3 整除（也就是 $m_3 \div 3$ 餘 0 的意思），$m_5 \div 3$ 餘 2，則 $(m_3 + m_5) \div 3$ 就是餘 2。那麼，如果 m_5 被 5 整除，而 $m_3 \div 5$ 餘 3，那不就是 $(m_3 + m_5) \div 5$ 餘 3 嗎？所以，找到具有上述性質的 m_3 和 m_5 ，則它們的和，就是一個「三三數之剩二，五五數之剩三」的數。從 3 的倍數 3、6、9、… 裡找一個除以 5 餘 3 的數，例如 18，就可以當作 m_3；從 5 的倍數 5、10、15、… 裡找一個除以 3 餘 2 的數，5 就可以，當作 m_5 。檢查看看，$m_3 + m_5 = 23$ 就是一個除以 3 餘 2、除以 5 餘 3 的數。

但是 23 並非唯一那樣的數，例如 38 也是。沿用前面的「關鍵知識」，只要 m_{15} 是 15 的倍數，它被 3 整除也被 5 整除，則 $m_3 + m_5 + m_{15}$ 除以 3 還是餘 2、除以 5 還是餘 3。注意 -15 也是 15 的倍數，而 $23 - 15 = 8$ 是「三三數之剩二，五五數之剩三」的最小正整數；換個說法，8 其實就是 $23 \div 15$ 的餘數。對所有的非負整數 k，$8 + 15k$ 都是解。

現在我們需要第二個關鍵知識。如果 $m_1 \div k = q_1 \ldots 1$ ， $m_2 \div k = q_2 \ldots r$ ，則 $m_1 \times m_2$ 除以 k 也是餘 r。這是因爲 $m_1 = q_1 \times k + 1$ ， $m_2 = q_2 \times k + r$ ，所以 $m_1 \times m_2 = (q_1 q_2 k + r q_1 + q_2) \times k + r$ ，也就是說 $(m_1 \times m_2) \div k$ 餘 r。

這就厲害了。只要在 3 的倍數中找到除以 5 餘 1 的最小正整數 M_3 ，在 5 的倍數中找到除以 3 餘 1 的最小正整數 M_5 ，則不論題目怎麼出，只要是「三三數之剩 r_3 ，五五數之剩 r_5 」的形式，全都可以用公式 $(r_3 M_5 + r_5 M_3) \div (3 \times 5)$ 的餘數得到最小正整數解。而 M_3 固定是 6， M_5 固定是 10。不妨拿前面的題目試招： $(2 \times 10 + 3 \times 6) \div 15 = 38 \div 15$ 餘 8，就是最小正整數解。

把上述想法往上推一層樓。如果 $M_{3,5}$ 是 3 和 5 的公倍數中除以 7 餘 1 的最小數； $M_{5,7}$ 是 5 和 7 的公倍數中除以 3 餘 1 的最小數； $M_{3,7}$ 是 3 和 7 的公倍數中除以 5 餘 1 的最小數。則凡是「三三數之剩 r_3 ，五五數之剩 r_5 ，七七數之剩 r_7 」的題型，全部可以用公式

$$(r_3 M_{5,7} + r_5 M_{3,7} + r_7 M_{3,5}) \div (3 \times 5 \times 7) \text{的餘數}$$

得到最小正整數解。而 $M_{5,7} = 70$ ， $M_{3,7} = 21$ ， $M_{3,5} = 15$ ， $3 \times 5 \times 7 = 105$ 。它們就是《孫子算經》指出的那四個神奇的數。

回到韓信點兵。因爲 $23 + 105k$ 都是士兵的可能數目，韓信必須目測一個概數，再配合公式說出答案。目測 105 的倍數實在不容易，例如八百多人和九百多人並不容易區分。想必聰明的韓信，早就推廣這個算法，造出「五五數之，八八數之，九九數之」的公式。可惜這是韓氏秘技，傳子不傳女…。現在，既然我們明白了原理，是否就可以『爲往聖繼絕學』了呢？