科學月刊【數·生活與學習】專欄 9905

「向量」從何而來？

單維彰·99 年 4 月 2 日

關於高中數學課程「向量」課題的教與學，我見過兩種學生。一種學生始終以「物理的真實性」來理解向量，設法將所有向量問題都轉譯成相對的物理意義。另一種學生直到學期即將結束，還沒有察覺數學課的向量和物理課的向量原來是同一種東西！（我兒子曾經屬於後面這一種。）兩種現象都不太好，也許後者比前者更不幸一點。

雖然，用平行四邊形之兩邊表現力或速度，用其對角線表現合成力或合成速度的作法，在古希臘就有，而且在牛頓的時代已經廣爲接受，但是那並不是今天我們對於「向量」的系統化認識。當時的合成是純幾何的操作，並無兩向量「相加」的觀念，也沒有發展出我們在教科書裡傳授的一套計算規律；換句話說，並沒有成爲一個代數系統。一般認爲，大約 1800—30 年間，將複數賦予幾何意義的觀念，也就是高中課程中稱爲複數平面或高斯平面的觀念，是現代向量觀念的前身。

另外，雖然「向量」(vector) 這個字（或者它的德文或法文版本）本來就有，卻是在 1840 年代，這個字才初步出現今天所指的數學意義。就好比「力」(force) 和「能量」(energy) 這些字也是早就存在，但是它們的日常意義卻迥異於它們的物理意義。

高中的數學課本或教師手冊裡，經常會舉出一些有趣的數學小故事或簡史。可是，似乎比較少提供向量的歷史或軼事。或許是因爲向量太「新」了。除了線性規劃（大約發展於第二次世界大戰時期）以外，向量（以及銜接其後的線性代數）大概是高中數學課程中「最新」的課題了。這篇短文希望能夠引起關於向量發展史的話題。

向量的前身是複數的幾何意義，也就是把複數 $a+bi$ 視爲平面上一點 $P(a,b)$ 的位置向量，亦即 OP 向量，其中 O 爲平面坐標的原點。則現在我們所知的向量加法、減法與係數積，就對應了複數的加法、減法和與實數的乘法。

在 1800 年代的前三十年，有五、六位數學家獨立發展了複數的幾何意義，並闡述了複數平面的性質。雖然不只一人發表了將複數與坐標平面連結的看法，並且分別發展出相當完備的理論和技術，卻都沒有受到廣泛的注意。直到大師級的高斯在 1831 也發表了這個觀念，才迅速被歐洲的數學家們注意並學習。雖然高斯發表的年份是 1831，但是根據後人考據他遺留的筆記，高斯可能在 1799 年就已經發展了所謂的「高斯平面」（這是典型的高斯）。

今天我們在高中課程中學習的平面向量，並不師法複數，也不多談與複數的連結。課程中的平面向量，其實是空間向量的「降階」版本。學生們應當會發現，運用平面向量處理的所有課題：做三角形的面積、重心或垂心或外心或內心的坐

標、做正射影、做鏡射點或反射點等等，都能用稍早學習的其他方法解決，只是採用向量手法使得事情變得比較簡單。可見平面向量被設計成學習空間向量的「前置經驗」，而數學史上的向量，是直接在空間中發展的。

複數顯然比向量更「豐富」：除了加減和係數積，它們還能相乘與相除，後來透過 Euler 公式更能做指數計算：$e^{a+bi}=e^{a}(\cos b+i\sin b)$。複數平面的「成功」令人振奮：平面上的點，可以像實數一樣地做加減乘除，並且符合所有的實數計算的規則（交換律、分配律、等等）。所以，大家應該不難想像，當時的數學家忍不住想要將這個想法推廣到空間，使得空間中的點也可以變成某種「數」，讓它可以像實數（或複數）一樣地計算。這就是 1840—60 之間，發展空間向量的一條線索。

在「將空間中的點實數化」這條線索上，主要（幾乎是唯一）的人物是愛爾蘭裔的英國大師漢彌爾頓 (William Hamilton, 1805—1865)。他在 1843 年發表「四元數」(Quaternion)，據說某天早晨他忽然想通了四元數，興奮地把它刻在剛好路過的一座橋上，如今還有紀念碑。漢彌爾頓是當代的名人，在數學、科學、文學，乃至於一般社會人士心中，都是一位可敬的天才和學者；他在即將年滿三十歲的時候，就已經由皇室授勳爲爵（牛頓也曾被封爵位）。在他發表四元數的文章上，有兩行寫標題，一行寫他的名字，但是有六行寫他的「頭銜」。

延續複數的 $z=a+bi$ 形式，漢彌爾頓將四元數寫成 $q=a+bi+cj+dk$，其中 a 是 q 的**純量部分** (scalar part)，$bi+cj+dk$ 是 q 的**向量部分** (vector part)。當兩個四元數相加減時，就是它們的純量和向量部分各自相加減；當兩個四元數相乘的時候，純量部分用到我們今天所說的內積，漢彌爾頓稱之爲**純量積**，而向量部分用到我們今天所說的外積，漢彌爾頓稱之爲**向量積**。在四元數裡，「向量」一詞正式被賦予了它今天在數學中的意義；而它特指空間中的向量。

我們今天使用的向量符號系統，雖然已經不是四元數，但是空間向量還是經常使用漢彌爾頓的 i, j, k 符號作爲標準基底向量。

大約從 1845 年起，漢彌爾頓幾乎投入了全部的時間去發展四元數的理論與技術，並以全身之力推廣它的使用。例如，他用四元數重寫了《幾何原本》；如今我們在課本中常見的「平面幾何之向量作法」可能源自於這本書。但是，能夠重做《幾何原本》並不足以說服大家，因爲畢竟幾何原本的知識都是舊知識，能夠重寫只表示四元數可能與慣用的數學體系相容，或許有時候更方便些，但是數學家更關心四元數能夠造出哪些新的、未知的知識？直到後來麥斯威爾等人發展的電磁學，才彰顯了四元數的實用性，並且使得幾個人陸續將它簡化，改造成如今所見的向量符號系統；在簡化與改造的過程中，逐漸放棄了原本希望四元數成爲數學中第三個「數系」的宏願（實數、複數、四元數），而與向量觀念發展的另一條線索（線性代數）相結合，演化成今天的符號系統。

爲什麼突然會有好幾個人不約而同地形成複數平面的想法？爲什麼也突然有好幾個人不約而同地形成了空間向量、甚至於內積和外積計算的想法？這是很有趣的問題。其實，在數學、科學乃至於哲學上，都常有這種現象。彷彿某個問

題或某個想法忽然充斥於「空氣中」，有許多人雖未彼此溝通而同時感受到了。這或許就是歷史的一種集體意識，當「認知」的發展到了某種程度，問題就浮現了，而解決的方法也就呼之欲出。

四元數使得漢彌爾頓成爲數學史上極爲少見的「悲劇英雄」；有許多數學史的作者以「悲劇」來詮釋這位天才在四元數上投注二十年光陰的故事。倒是應該特別聲明，四元數雖然「失敗」了，但是它並沒有「錯誤」。數學家選擇「豐富」但是簡潔的符號系統，而四元數雖然「豐富」卻可能過度複雜，所以它豐富的本質被萃取出來，而複雜的符號系統卻逐漸被更簡潔的方式取代了。