科學月刊【數・生活與學習】專欄 9909

從四元數到空間向量（下）

單維彰・99 年 7 月 19 日

上一期說到漢彌爾頓創造了相容於實數和複數的四元數 $q = u + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$，並看到四元數的運算包含了空間向量的內積和外積。儘管漢彌爾頓的聲譽卓著，當時的數學和物理學者並不認同四元數的實用性。真正可以仰仗四元數而發展的物理觀念，在漢彌爾頓身故 (1865) 之後才發生，那就是麥斯威爾（James Maxwell）的電磁理論。

麥斯威爾是蘇格蘭人，他與追隨漢彌爾頓並成為四元數之最大推手的泰德 (Peter Tait, 1831—1901) 是同鄉兼同窗。當麥斯威爾在 1870 年向泰德討教四元數的時候，他的電磁理論已經成形，只是還沒找到描述那些物理想法的數學語言。從他們的通信中看得出來，麥斯威爾覺得四元數太麻煩而態度有所保留，至於泰德則努力地遊說。

表現在麥斯威爾 1873 年出版的畫時代著作《電與磁之論》 (A Treatise on Electricity and Magnetism) 裡面的數學，的確是四元數，但是麥斯威爾也不厭其煩地併陳「笛卡兒方法」，也就是分別描述 x 坐標、y 坐標和 z 坐標的方程式，並且不止一次提到：如果能將純量和向量的計算分開來做，應該會更簡潔，而且更直接對應物理意義。英國劍橋大學出版社今年 (2010) 又重新發行了這本經典，注意此書的標題並沒有使用「電磁」合成字 (electromagnet)。

麥斯威爾出版《電與磁之論》後六年就過世了，來不及實現他心目中更「簡潔」的向量數學。這份著作引領了許多跟隨者，包括美國耶魯大學的吉布斯教授 (Willard Gibbs, 1839—1903) 和英國的自學天才黑維塞 (Oliver Heaviside, 1850—1925)。

吉布斯讀《電與磁之論》的時候已經是教授而且已經發表了重要的物理論文，但是他讀了這本書之後才開始學習四元數，當作研究電磁學的工具。過程中他洞察四元數有「多餘的」性質可以略去，只要擷取向量的係數積、內積、外積和一些我們在大一微積分課程中學習的微分與積分的運算，就能描述電磁現象並據以計算和推論。吉布斯從 1877 年起開授電磁學課程，在課堂上採用他發展的向量方法；後來，他在 1881 年自費印刷了向量講義，除了課堂使用以外，陸續郵寄了大約 130 份給其他同好。二十年後的 1901 年，總算由他的學生 Wilson 代筆撰寫並正式出版為《向量分析》(Vector Analysis) 教科書。

黑維塞讀《電與磁之論》的時候是一位失學而且無業的 24 歲「啃老族」，他決定要自修成為一名物理學家。他同樣為了研究電磁學而學習四元數，也同樣將四元數「去蕪存菁」成空間向量及其運算，並應用在他 1883 年發表的電磁學論文裡。當他在 1888 年拿到吉布斯的講義時，赫然發現他們發展了完全一樣的向量方法。但是這兩人從來不曾爭論誰先誰後，或許他們是當時世界上唯二的向量

推手，必須惺惺相惜吧。黑維塞於 1893 年出版的《電磁理論》 (Electromagnetic Theory) 被認爲是麥斯威爾理論的正宗後裔，其中有長長的一章向量分析。

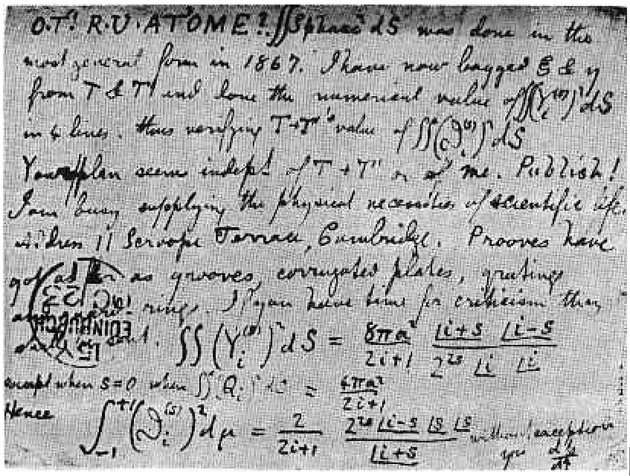
相對於四元數，向量並不相容於實數，也不能自成一個代數系統。向量內積的結果不再是向量，所以內積不是向量乘法；而外積的結果雖然是向量，卻不滿足結合律（例如 $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}=-\vec{i}$ 但是 $\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})=\vec{0}$ ），還會有非零向量之外積是零向量的窘況（任兩個平行向量的外積是零向量）。儘管向量的計算規則如此之「醜」，物理學者和其他的科學家終究因爲實用性而選擇了它，正所謂**不美總比不妙好**。

在十九世紀的最後十年，吉布斯受到英國數學界很不友善的批評，但是畢竟他人在美國，並且有德國人的支持，而身在英國的黑維塞則有一段幾乎投稿無門的日子。不同於吉布斯的低調：他只是默默地寄送他「未出版」的課堂講義，黑維塞和英國數學界展開針鋒相對的十年筆戰。進入二十世紀之後，塵埃很快落定，吉布斯和黑維塞從四元數「擷取」出來的空間向量及其演算，成爲今天的標準數學內容。

至於漢彌爾頓，他有更好的選擇嗎？他是不是沒有找到最好的空間數形式？有沒有更妙的空間數等著我們這些後人發掘呢？簡單地說：沒有了。霍維茨 (Adolf Hurwitz) 在 1898 年證明：在合理的條件下，所有的「數系」只有四種：實數、複數、四元數，和一種相當於由四元數所造成的複數。所以，漢彌爾頓畢竟是位大師級的數學家，他之所以沒想到更妙的形式，是因爲它根本不存在。霍維茨的條件是爲了讓新數系與實數「相容」而設立的合理要求：

1. 數系中的數是 $a=a_0e_0+a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ ，其中 $e_0=1$ 、 e_1 、 … 、 e_n 是生成元素， a_0 、 a_1 、 … 、 a_n 是實數，而 e_i 與 e_j 相乘的結果是某個 e_k 或 $-e_k$ 。
2. 非零的兩數不得相乘爲零。
3. 乘法滿足結合律。

所以，漢彌爾頓畢竟是位大師級的數學家，他之所以沒想到更妙的形式，是因爲根本不存在更妙的形式。


O.T.! R.U. ATOME? ∬ Sph. harm.² dS was done in the most general form in 1867. I have now bagged ξ & η from T & T' and done the numerical value of $\iint (Y_i^{(\sigma)})^2 dS$ in 4 lines. thus verifying T+T''s value of $\iint (\Theta_i^{(\sigma)})^2 dS$
Your plan seems indep^t of T + T' or of me. Publish!
I am busy supplying the physical necessities of scientific life within 11 Scroope Terrace, Cambridge. Grooves have [illegible] as grooves, corrugated plates, grating rings. If you have time for criticism than [illegible]

$$\iint (Y_i^{(\sigma)})^2 dS = \frac{8\pi a^2}{2i+1}\,\frac{\lfloor i+s \; \lfloor i-s}{2^{2s}\lfloor i \; \lfloor i}$$

except when s=0 when $\iint Q_i^2 \, dS = \frac{4\pi a^2}{2i+1}$

Hence $$\int_{-1}^{+1} (\Theta_i^{(s)})^2 d\mu = \frac{2}{2i+1}\,\frac{2^{2s}\lfloor i-s \; \lfloor s \; \lfloor s}{\lfloor i+s}$$ without exception

圖一：麥斯威爾寫給泰德的信件。