科學月刊【數‧生活與學習】專欄 9910

「矩陣」為什麼要相乘？

單維彰‧99 年 8 月 31 日

數學史大約已經認定英國數學家凱萊 (Arthur Cayley, 1821—95) 是開創矩陣理論的人。凱萊本人卻在文章中指出矩陣之觀念由來已久，而且「matrix」這個字是席維斯 (James Sylvester, 1814—97) 建議的。正如現在大家所知，矩陣是以矩形排列的一組數。雖說是「矩」陣，但早期的數學家其實僅討論「正方形」矩陣，也就是 $n \times n$ 矩陣或 n 階方陣，簡稱方陣。

方陣之概念，自從克拉瑪在 1750 年引入行列式之後，就跟著進入西歐的數學圈了。即使數學家早就有必要區分用來計算行列式的那 n^2 個數以及行列式本身，卻長期沒這麼做。直到席維斯覺得不分開這兩個觀念實在不舒服，他用了 matrix 表示計算行列式的那 n^2 個數。Matrix 這個字有「母體、基礎」的意思，暢銷的電影『駭客任務』的英文片名就是『Matrix』。席維斯可能意指 matrix 是行列式的「母體、基礎」。

凱萊先在 1855 年研究不變量的論文裡簡略定義了方陣觀念，用它處理不變量的計算。然後在 1858 年發表了一篇 24 頁的論文〈A Memoir on the Theory of Matrices〉（矩陣理論紀要），涵蓋所有初學者該知道的方陣知識，包括方陣的特徵多項式、特徵值及所謂的「漢彌爾頓—凱萊定理」。

「漢彌爾頓—凱萊定理」是說：令 $p(x)$ 是方陣 A 的特徵多項式，則 $p(A)=O$，其中 O 是與 A 同階的零方陣。這其實是凱萊提出的定理，之所以在文章裡提到漢彌爾頓，是因爲他在聽漢彌爾頓的四元數課程時，被啓發了這個想法。但是凱萊在文章中只證明了 A 是 3 階方陣的情況，完整的證明是弗洛畢伍斯 (Ferdinand Frobenius, 1849—1917) 在二十年後完成的。但是弗洛畢伍斯仍然慷慨地稱此定理爲「漢彌爾頓—凱萊定理」。

凱萊曾經指出他研究方陣的動機並非來自於四元數，而是爲了簡化「線性變換」

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

的描述和書寫。前面這個看起來很像二元一次聯立方程式的式子，

其意義是把平面上的點 (x,y)「變換」成另一個點 (x',y')。令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，凱萊將上述線性變換簡記成 A，我們也說 A 是線性變換的表達方陣。

「簡記符號」通常有助於概念理解和理論發展，但是未必就是「實用工具」。譬如乘法是連加的簡記符號，3×7 是七個 3 的連加，用 3×7 代替 $3+3+3+3+3+3+3$ 顯然是個好主意。但是，如果記不得九九乘法表，則 3×7 只能用 $3+3+3+3+3+3+3$ 來計算，那麼乘法就只是簡記符號，不是實用的計算工具。

數學概念經常反映在符號的操作，所以「簡記符號」的確可以促進概念的發展。但是，工具的功勞不可忽略；沒有工具的概念並不能發揮它真正的能耐，就好像沒有燃料的汽車不能把人載去遠方。讓方陣從「簡記符號」變成「實用工具」的，當然是電子計算機；這或許可以解釋，爲何『線性代數』在 1960 年代以後，在理工科系中變成越來越常見的數學基礎科目。

就凱萊的動機而言，方陣乘法來自於兩次線性變換的合成。給定兩個線性變換 $P_1:\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y \\ y'=a_{21}x+a_{22}y \end{cases}$ 和 $P_2:\begin{cases} x'=b_{11}x+b_{12}y \\ y'=b_{21}x+b_{22}y \end{cases}$，則 P_1 的表達方陣就是前述的方陣 A，而 P_2 的表達方陣是 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$。$P_1(P_2(x,y))$ 的意義就是點 (x,y) 先經過 P_2 變換、再經過 P_1 變換的結果。因爲合成的效果是

$$\begin{cases} x'=a_{11}\left(b_{11}x+b_{12}y\right)+a_{12}\left(b_{21}x+b_{22}y\right)=\left(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\right)x+\left(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\right)y \\ y'=a_{21}\left(b_{11}x+b_{12}y\right)+a_{22}\left(b_{21}x+b_{22}y\right)=\left(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\right)x+\left(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\right)y \end{cases},$$

所以凱萊定義方陣 A 乘以 B 的運算規則如下：

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

因此 $P_1(P_2(x,y))=AB\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，也就是說合成變換 $P_1(P_2(x,y))$ 的表達方陣就是 AB。

方陣相乘的動機並不僅線性變換這一條線索。柯西早在 1812 年就考慮過行列式乘積相等的算法，用方陣符號來說，就是 $\det(AB)=(\det A)(\det B)$，其中 AB 就是方陣的乘積。那是爲了擴展行列式性質而做的純數學研究，所以，雖然柯西的工作較早，但是因爲缺乏應用的動機而不宜當作引介方陣的教材。

今天的高中數學課程，在還沒有具體動機的條件下就定義方陣乘法，甚至包括一般的「矩形」矩陣乘法，通常還緊接著探討方陣乘法的代數特性。這種缺乏動機與實用範例的教學，實在值得數學教育者再審慎考慮。

凱萊誕生於倫敦的一個環境優渥的家庭，17 歲成爲劍橋三一學院的大學生。20 歲時發表了最初的數學論文，內容接續了拉格朗日的一件早期工作。因爲學術界一職難求，他「暫時」以律師爲職業，專司財產轉讓。但是他對數學的熱情顯然不曾間斷，例如他趁著去都柏林受教育訓練的機會，聽了漢彌爾頓的四元數課程。在他以律師爲業的十七年間 (25—42 歲)，發表了二百多篇數學論文。在 1863 年，劍橋終於因爲一筆新的基金而設立第二個數學「教授」席位：「薩德萊教授」(Sadleirian Professor)。凱萊放棄高薪的律師工作，回到劍橋成爲第一位薩德萊教授。在此之前，劍橋只有一席數學教授，就是牛頓做過的「魯卡斯教授」(Lucasian Professor)。