科學月刊【數‧生活與學習】專欄 9912

「財富月」和「9」

單維彰‧99 年 11 月 12 日

有一位朋友說：『我發現科學月刊的每個專欄都很有趣耶…』，稍微遲疑之後接著說：『除了你的以外。』我的反射回應是：『我也這麼覺得耶。』每個月的收到《科學月刊》都最先讀「一月紀聞」，然後按照順序讀「昆蟲與人」、「咱的海」、「數裡遊」專欄，然後翻到最後看書評和科學史。休息幾天之後，再慢慢讀封面故事和其他文章。這個專欄的內容越來越無趣，再這樣下去就壞了科月招牌了。

幸好，最近我連續收到兩封很「白目」的廣播依媚兒 (E-Mail)，提供了比較「生活化」的話題。

有一封依媚兒的標題是「2010/10 財富月」，也許讀者們也收到了，內容是：

> 2010年10月有一個非常有趣的現象，這個月非同尋常：它有5個週五，5個週六，5個週日，這要823年才發生一次。這樣的月份被認為是財富月，把這一發現發給8個好友，4天後你會得到很多錢。

我不知道「浪費大家的時間，製造垃圾郵件」對這封信的創造者有什麼好處？以至於他（她）要大家轉寄給「8 個好友」？（足堪安慰的是，收信人發現自己是某人的「好友」。）

如果它不是過度誇張地寫「823 年才發生一次」，我或許不會多想而直接刪了它。但是這個「命題」實在太離譜，與直覺相去甚遠；更何況，我收到的那一份依媚兒還附了一張 2010 年 10 月的月曆圖。看著那幅月曆的形式，就更容易發現：只要某個月有 31 天，也就是「大月」，而當月的首日是週五，它就有 5 個週五，5 個週六，5 個週日；也就是說，它是所謂的「財富月」。

稍微想一想，就知道當月是大月的機率是 $\frac{7}{12}$ ，當月的首日是週五的機率是 $\frac{1}{7}$ ，所以「財富月」發生的機率是 $\frac{7}{12}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{12}$ ；大約每年出現一次。

其實，某月首日之星期數，是命中注定的 (deterministic) 而不是碰運氣的 (stochastic)，我們不應該用機率處理上述問題。但是，機率的思考方式顯然是個很具有啓發性 (heuristic) 的「概算」。雖然「十二分之一」不盡正確，卻至少表明了「823 年才發生一次」絕對不該採信。

有了「大約每年出現一次」的信念之後，我就不願意多花腦筋了。直接打開電腦裡的月曆，一個月一個月地翻下去，很快就發現明年（民國一百年）七月又是個「財富月」。

在「月份首日之星期數」的確定性上多說一段吧。很多人剛開始學習寫電腦程式時，都做過「萬年曆」作業。假設閏年和日曆的規則不變，給定西元 2001

年元旦是星期一（第 21 世紀的第一天是星期一！），可以寫程式算出 21 世紀之後任一個日期的星期數；其實在那之前的也算得出來，不過計算到太久以前並沒有意義，因爲早期的日曆規則跟現在並不相同。我們可以推算，在閏年規則的 400 年週期之中，首日爲週日、一、二、…、六的平年分別有 43, 43, 44, 43, 44, 43, 43 個，閏年分別有 15, 13, 14, 14, 13, 15, 13 個。首日在週一的平年、以及在週日的閏年，都沒有財富月；首日在週五的平年或閏年各有兩個財富月，其他年度都恰有一個財富月。如此算來，每 400 年恰有 400 個財富月！所以當月爲財富月的（古典）機率是 $\frac{400}{12\times 400}=\frac{1}{12}$。可見前面所說的「啓發性」算法，畢竟是正確的。

我要談的第二封廣播依媚兒，標題是『誰是你的偶像？』內容頗長不便轉錄，大意是說有一種很準確的「算命」法，可以正確算出你的偶像。算法是，請你先挑一個介於 1 和 8 之間的數（我相信它指的是 ≥ 1 且 ≤ 8 的正整數），將它乘以 3，加上 3 之後再乘以 3，得到一個二位數，將那兩個數目字相加，對照以下的名單就找到了你的「偶像」。然後，寄信的人提供一份十二人的名單，例如

1. 愛因斯坦
2. 雷根

… (略)

9. 林孝信（科學月刊創始人）
10. 邱吉爾
11. 林志玲
12. 達賴喇嘛

寄信的人應該在第 9 號放一個對自己有利的名字，因爲答案一定是 9（沒有計算錯誤的話）。

這其實是一道不錯的國中數學題目。大家都知道（十進制）二位數 37 的意義是 $3\times 10+7$，現在須將此概念符號化：如果某數 $n=10a+b$，其中 a, b 爲正整數且 $0\le a,b\le 9$，則 n 是一個二位數，而且它的兩個數目字之和是 $a+b$。

根據「算命」規則，計算出來的數是 $n=(3k+3)\times 3=9k+9$，其中 $0\le k\le 8$ 是一個正整數。因爲 $9k=10k-k$，所以 $n==10k-k+9=10k+(9-k)$。因爲 $1\le 9-k\le 9$，可見 k 和 $9-k$ 滿足前述二位數的條件，所以 n 是一個二位數，而它的數目字之和是 $k+(9-k)$ =9。所以答案一定是 9。

從前面的討論，我們發現一個關鍵是 $0\le k\le 9$ 和 $0\le 9-k\le 9$ 都要成立。而 $0\le k\le 9$ 其實保證了 $0\le 9-k\le 9$；也就是說，只要假設 $0\le k\le 9$ 就行了。所以，信中要求對方挑選一個介於 1 和 8 之間的數，可能只是障眼法，我們可以請受試者任意挑一個「個位數」。

前面所說的兩種計算，看起來像是碰運氣的，其實卻是命定的。數學中有許多這樣的例子，其中最令人困惑不解的，可能是所謂的「$3x+1$ 問題」。試隨便挑一個正整數爲 x_1，用以下規則製造一個數列 $\langle x_n\rangle$：令 $k\ge 1$，當 x_k 是偶數時，取 $x_{k+1}=x_k/2$，當 x_k 是奇數時，取 $x_{k+1}=3x_k+1$。因爲 x_1 是隨機選取的正整數，以

上程序看起來應該是一個「碰運氣」的數列。其實不然，讀者可以試試看，這個數列「最後」總會變成「4, 2, 1」的單調循環數列。

利用整數性質而設計的數學遊戲還有非常非常多，以上這一個算是最簡單的一類。其他較爲複雜的，等到有人爲它搭配一個有趣的「情境故事」，也可能會在網路上流行起來。現在閃過的念頭，是以下這個現象：142857 是個有趣的六數，它乘以 2, 3, 4, 5, 6 的結果，都是同樣那六個數目字 1, 4, 2, 8, 5, 7 的循環重組；但是乘以 7 就成了 999999。它背後的道理是：142857 是 $\frac{1}{7}$ 之無窮循環小數的循環節。我無法爲這個有趣的現象創造一個情境或故事，就等著大家的創意囉。