Lecture 1

前言

在這一學期的微積分課程裡, 我們將注意力完全集中在單變數函數上. 所以, 這可以說是一門**單變數微積分**課程. 這門課的對象, 是工學院的一年級學生; 而目的, 是為其將來的工程與技術訓練, 奠定清晰的數學基礎. 我們深信, 清晰的理解未必來自繁複的訓練; 尤其在電腦軟體如此成熟的今天, 我們有幸可以將繁複的手續交由機器代勞, 而得以將大部分的精力集中在觀念的理解上.

在教學方法上, 我們企圖以數值計算的估計, 圖形的展現, 口語的討論, 以及數學的嚴謹形式, 交代微積分的觀念, 理論與算法, 並同時釐清因微積分而引出的重要數學命題. 例如實數的結構, 函數的連續性, 實數數列與級數, 函數數列與級數的收斂性問題.

由於時間的控制因素, 我們在運算能力的訓練上, 很可能會受到限制. 面臨這個無奈的取捨, 我們嘗試以符號計算軟體作為輔助工具. 在認識了當今這一類軟體的能力之後, 我們該有理由相信, 日後的工程師, 其微積分運算能力的重要性, 就有如昨日的工程師, 其四則運算能力的重要性一般: 不太重要. 當然, 快速而正確的心算能力仍然受到人們贊賞, 但是已經鮮少有人會依此而評斷一個工程師的能力. 纖小而可靠的數值計算器, 使得四則運算在人類智識活動中的定位大為改變. 雖然教育體制仍然堅持學生應該具有四則運算的能力, 但是我們不再以此為主要課題. 人們普遍地相信, 只要給予足夠的時間和紙筆, 一個受過完整教育的人必定能完成一個四則運算的命題—因為他了解計算的方法. 在這個課程中, 我們將電腦軟體放在完全一樣的定位上. 也就是說, 我們將堅持學生具有微積分運算的能力. 透過測驗, 學生必須表現出他了解這些運算的基本方法, 而讓我們相信, 只要給予足夠的時間和紙筆, 他必定能完成一個基本的微積分運算命題. 至於一個工程師在他的專業領域中實際面臨的微積分運算問題, 理應交由電腦處理.

單變數函數

什麼是單變數函數呢? 就是我們在高中時候看過的 $y = f(x)$ 這種函數. 它只有一個變數 x, 工程上習慣說 x 是自變量, 因為它自己在變, 不隨著其他的因素改變. 而 y 叫做應變量. 一個函數並非只是一個數學公式, 或是一串數學符號而已. 我們其實是希望用數學的函數觀念來描述自然界的現象. 舉例來說, 在自然現象與幾何理論中, 能夠用一個變數來描述的變化情形有如正方形的面積是邊長的函數, 圓的面積是半徑的函數, 溫度是時間的函數, 位移 (想像汽車上的碼表) 是時間的函數, 股票指數是日期的函數, 等等.

很明顯地, 如果想要描述自然界的現象, 只用一個變數顯然是不夠的. 例如矩形面積是長與寬的函數, 圓柱體的體積是底半徑和高的函數, 烤箱中的溫度是三度空間座標與時間的函數, 大氣的流動是經緯度, 高度, 溫度與壓力的函數, 等等. 那麼為什麼我們在這裡只限定學習單

變數函數呢? 因為它比較簡單嘛. 而且, 對於基本的單變數函數的瞭解, 有助於瞭解更複雜形態的函數.

什麼是函數呢? 提到函數這個名詞, 我們早就知道了. 高中同學至少知道, 所謂函數, 是從某一個集合 A (稱作定義域) 到某一個集合 B (稱作值域) 的映射. 基本上就是這樣, 但是並非任意從 A 到 B 的映射都是函數, 還要加上兩點限制. 如果對 A 中的**每一個**元素都在 B 中有一個, 而且**僅有一個**, 元素與其對應, 這樣的映射才叫做**函數**. 那, 什麼是**映射**呢? 讓我們暫時對這個名詞保持直觀的認識, 以後再來解釋它.

我們都熟知 $y = f(x)$ 這樣的函數在 x-y 座標平面上可以表現成一條曲線. 這是我們熟悉的哲學家—笛卡耳的突破性創見, 使得代數方程式與幾何圖形成為一體. 因此, 在下列圖形中,

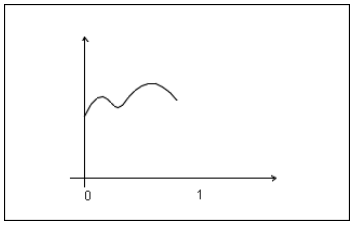

Fig 1

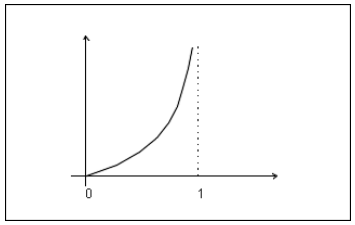

Fig 2

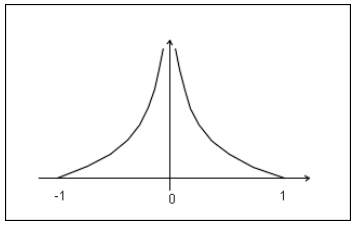

Fig 3

圖一是一個從 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數圖形, 但圖二只能說是一個從 $[0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數圖形, 因為它在 1 那一點沒有對應的函數值. 同樣的, 圖三也只能說是一個從 $(-1,1) \setminus \{0\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數圖形. 而下列的圖形中,

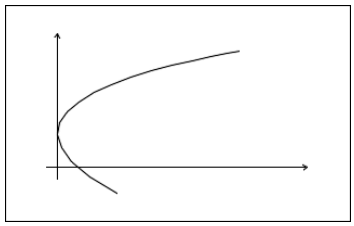

Fig 4

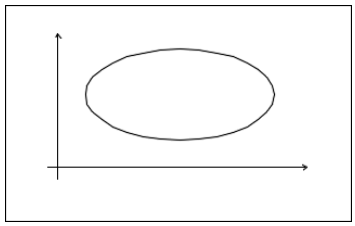

Fig 5

圖四不可能是一個 $y = f(x)$ 的圖形, 它倒有可能是一個 $x = f(y)$ 的圖形. 而圖五就根本不可能是一個函數的圖形了. 因為對每一個 x 值, 都有兩個 y 值與它對應; 反之亦然.

一個單變數函數的圖形, 有什麼意義? 我們可以想像, 它記錄了某種在一維空間中隨時間的變化.

做實驗

從實驗中, 我們至少看到幾個基本的意義: 圖形的閱讀, 總是從左到右. 上升的段落, 代表漸增的變化. 越陡的段落, 代表越快速的變化. 發生相對極值的時間, 就是變化方向折反的時間.

微分

我們看到, 一個單變數函數可以想像成某個量隨時間的變化情形. 那麼, 所謂 $[x_0, x_1]$ 之間的**變化率**就是

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

假如 $f(x)$ 表示的是位移, 那麼變化率也就是平均速率的意思.

我們在讀國中的時候, 就已經可以很熟練地回答以下這種問題:

> 小明從家裡出發到學校, 已知兩地間的距離是 2 公里, 小明一共花了三十分鐘的時間. 問小明的平均速率是多少公里/小時?

假設我們以小時為單位, 做成 x 軸, 將小明的家到學校的路途做上里程標, 並以公里為單位當成 y 軸. 令 $y = f(x)$ 記錄小明在時間 x 和家裡的距離. 那麼上述問題就是問 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 之間的變化率. 我們都知道答案.

但是, 在這麼大範圍裡面的變化率, 實在很難明確描述小明的運動狀態.

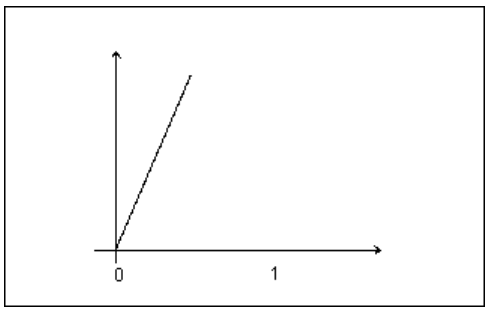

Fig 6

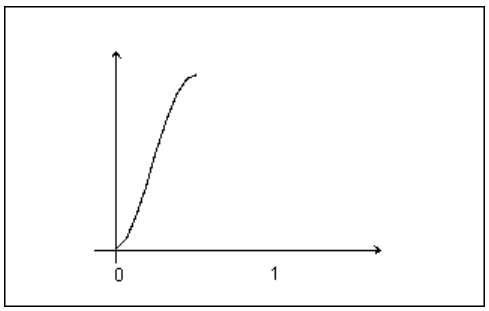

Fig 7

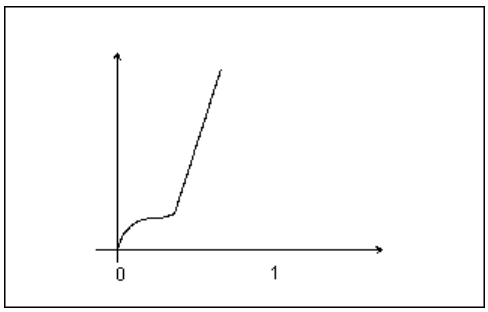

Fig 8

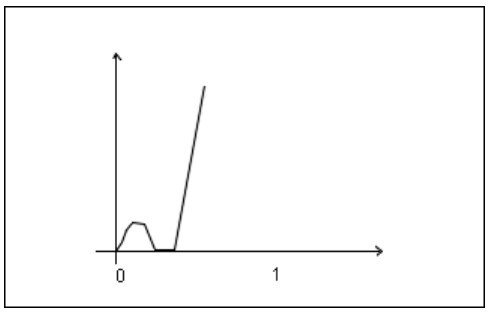

Fig 9

如果 $f(x)$ 的圖形像圖六, 表示小明打從家裡出發開始, 就以等速率, 也就是平均速率, 向學校前進; 一刻也沒有耽擱. 如果 $f(x)$ 的圖形像圖七, 表示小明一開始的時候走得很快, 但是接近學校的時候, 可能是累了, 就慢下來了. 如果 $f(x)$ 的圖形像圖八, 表示小明一開始就慢吞吞地走, 中間甚至還停下來磨菇了一陣子, 然後突然加快了腳步直奔學校. 如果 $f(x)$ 的圖形像圖九, 表示小明在前往學校的路途當中折返回家, 可能是忘了什麼東西, 然後他又加快

了腳步趕往學校. 這四種情形的移動方式, 都獲至一樣的平均速率. 可見這個數據對於整個運動的描述, 太過粗糙了. 如果我們能知道, 在每一瞬間 x, 小明的移動速率, 那我們將會對整個運動的過程多一些瞭解.

所謂微分, 就是求瞬間變化率的問題. 變化率我們瞭解, 但瞬間是什麼? 如果我們假設一秒鐘是一個瞬間, 那麼就以 $f(x)$ 在 $[x, x+\frac{1}{3600}]$ 中的變化率來充當答案. 在一般日常生活的應用上, 似乎這也可以了. 但是數學家顯然不能滿足於這種不明確的估計. 因為半秒鐘比一秒鐘短, 它當然更有資格被當作是一瞬間. 那麼一微秒呢? 那麼 10^{-12} 秒呢? 只要你提議一個時間單位作為瞬間的定義, 我們就可以提出一個更短的時間單位, 更有資格作為瞬間的定義. 這樣的競爭將永無終止. 那你說, 就拿 0 秒鐘來作為瞬間的定義, 總不能再小了吧. 不行, 0 秒鐘根本沒有長度, 所以這時候 $f(x)$ 根本沒有變化, 在每一個固定的時間 x, 小明是靜止的, 他沒有移動. 所以, 也根本沒有變化率可言.

有些人已經知道, 瞬間變化率就是切線斜率. 但是這也不能解答我們的困惑. 因為, 追究下去, 就要問什麼是切線? 而這個問題和什麼是瞬間變化率的問題, 根本是等價的. 所以, 什麼叫做瞬間變化率? 它的數學定義是什麼? 這是我們即將面臨的課題.

積分

在高中的時候, 我們都有這樣一個概念: 積分就是求曲線下的面積. 例如下圖,

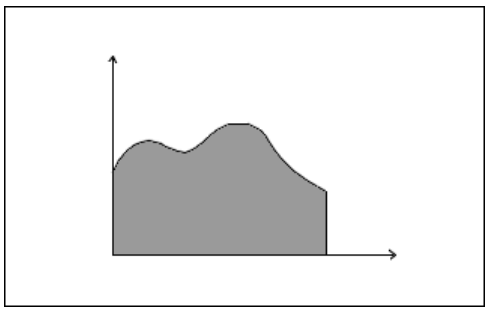

Fig 10

$f(x)$ 從 0 到 1 的積分就是灰色部分的面積. 說到面積, 我們都耳熟能詳. 對面積的認識, 可能已經屬於我們的直覺的一部分了. 因為太熟悉了, 使得我們不假思索.

的確, 每個人對面積都有直觀的認識. 例如圖十一中的兩個圖形, 每個人都看得出來, 哪個面積比較大. 但是, 誰看得出來圖十二中的兩個圖形, 哪個面積比較大嗎?

因此, 單靠直覺是不夠的, 我們需要數字. 也就是說, 我們所謂的面積, 其實是跟隨著某個幾何性質的一個數字. 在應用上, 面對一個圖形的時候, 我們需要一套明確的算法, 用以求知它的面積 (的那個數字).

回想我們所接受的教育, 我們知道哪些圖形的面積呢? 實在是少得可憐. 基本上, 我們其實

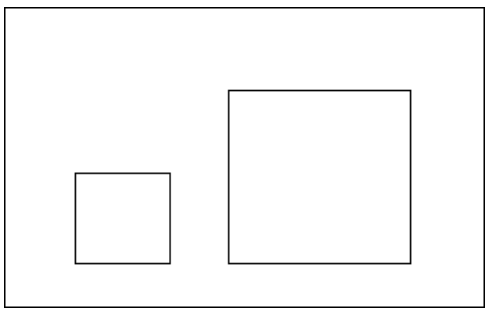

Fig 11

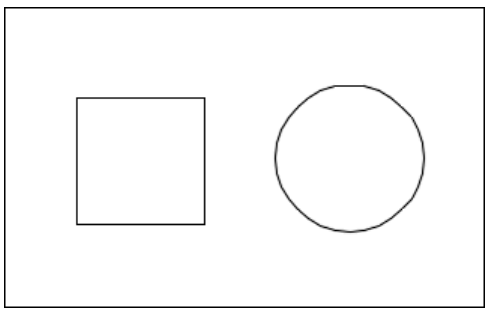

Fig 12

只知道什麼是矩形的面積.

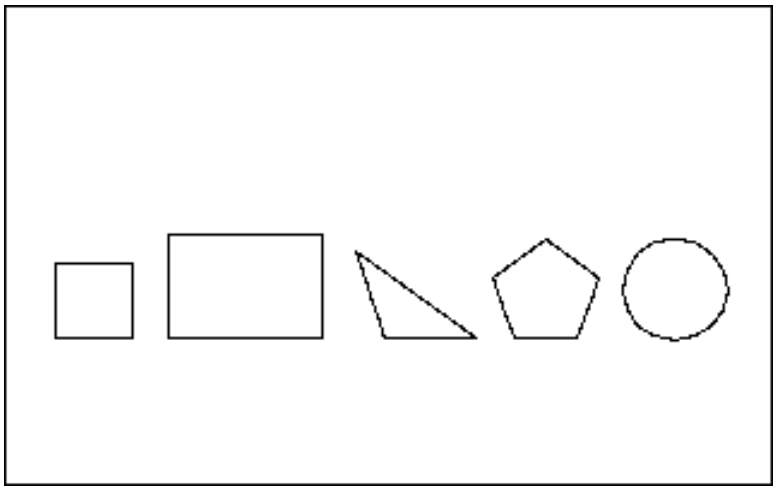

Fig 13

從矩形的面積, 我們推導出三角形的面積, 及至於多邊形的面積. 圓的面積是一個奇特的例子, 我們通常只是背公式, 知道它是 πr^2. 至於它是怎麼來的, 卻不甚了了.

既然我們只知道那麼少種類的面積, 更徨論任意曲線下的面積呢? 所以, 當我們說, 像圖十那樣的曲線下灰色部分的面積時, 我們其實不知道自己在說什麼. 究竟什麼叫做曲線下的面積, 它的數學定義是什麼? 這是我們即將面臨的課題.

微積分

前面我們說了, 直觀地認為, 微分就是曲線上的瞬間變化率, 積分就是曲線下的面積. 這兩件事有什麼相干, 為什麼被湊在一起叫做微積分了呢?

早在西元前 200 多年, 希臘人 (通常以阿基米德為代表) 已經幾乎有了積分的觀念與算法, 而且也已經熟悉地運用曲線的切線. 因此我們可以說, 古希臘人已經發展了粗具模型的微分與積分. 那又為什麼, 我們通常說, 微積分是在十七世紀末, 由牛頓 (Newton) 和萊布尼茲 (Leibniz) 發明或發現的呢? 原因之一, 是因為這兩位先人發現了微分和積分的關係. 用一

句話來說, 就是

曲線下面積的瞬間變化率就是函數值本身

寫成了數學式子就是

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = f(x), \tag{1}$$

這叫做**微積分基本定理** (的兩種形式之一).

讓我們從圖形來欣賞這個基本定理.

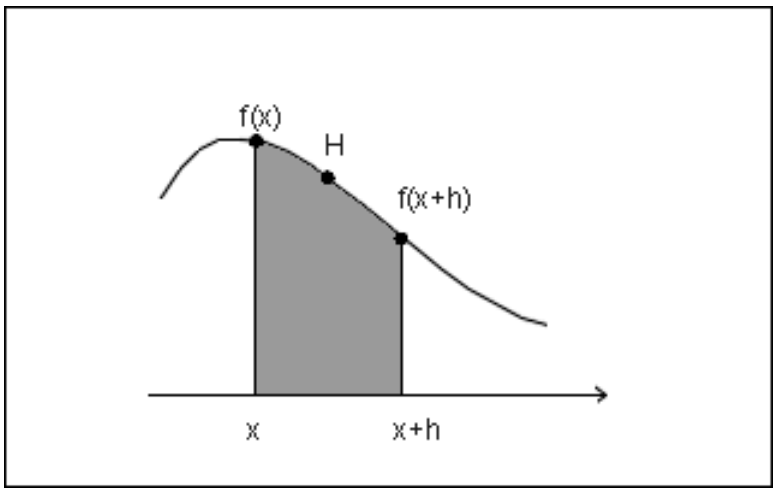

Fig 14

在圖十四中, 我們假設 h 是所謂的瞬間. 則 $f(x)$ 的曲線下面積之瞬間變化率就是在 $[x, x+h]$ 之間, 曲線下的面積, 除以 h. 用數學式子寫來, 就是

$$\frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h}.$$

假設答案是 H. 那麼, 想像一個寬 h 高 H 的矩形. 此矩形面積 $(h \times H)$ 等於在 $[x, x+h]$ 之間的曲線下面積. 用我們的直覺來判斷, 可以想像 H 的高度應該落在 $f(x)$ 和 $f(x+h)$ 之間. 那麼, 當我們縮小 h, 也就是縮小所謂瞬間的定義的時候, 差不多就可以看到 H 最終會和 $f(x)$ 是一樣的. 基本上, 這就是牛頓和萊布尼茲的重大發現. 我們將會嚴格地證明這個現象.

那又如何呢? 我們將會從 (1) 式中推衍出微積分基本定理的第二種形式:

$$\int_a^x \frac{d}{d\xi} f(\xi)\,d\xi = f(x) - f(a).$$

於是我們就有了一個積分運算的算法. 求積分, 無異於求微分的反運算.

那麼求微分呢? 牛頓引入了所謂流數術的方法, 為所有的多項式已及三角函數的微分找到了公式. 換句話說, 所有多項式以及三角函數的積分也就有了運算規則. 流數術的過程似是而非, 只有觀念非常清楚的人才知道該怎麼做. 比如說, 我們都已經知道 x^2 的導函數是 $2x$. 怎麼用流數法求得這個結果呢? 牛頓假設一瞬間的時間是 ι. 所以 x^2 的瞬間變化率就是

$$\frac{(x+\iota)^2 - x^2}{\iota}.$$

經過普通的代數運算, 化簡成

$$2x + \iota.$$

但是 ι 是非常非常小的量 (infinitesimal), 所以把它省略了, 就得到 $2x$. 問題是, ι 如果不是零, 你就不能省略它; 如果它是零, 你就不能把它放在分母. 這就是著名的柏克萊悖論 (1734 年). 這個歷史性的百年大爭辯, 最後定於柯西 (Cauchy) 的論證. 也就是我們將要學習的 ϵ-δ 論證.

從十九世紀中葉到今天, 柯西的 ϵ-δ 論證成為數學界處理這一類問題 (所謂的**數學分析**) 的標準手段. 但是在 1960 年代, 枯樹上發了新芽, 一位數理邏輯學家魯賓遜 (Robinson) 發展了一套推廣的實數系統, 使得牛頓的流數術得到邏輯上正確的解釋. 這種復古的論證, 今天反而被稱為**非標準分析** (nonstandard analysis). 限於時間, 我們可能不便在此課程中多做這一方面的論述.

習題 1

1.1 例舉三個自然現象或幾何理論中的單變數函數.

1.2 例舉三個自然現象或幾何理論中的多變數函數.