Lecture 10

數列之收斂檢驗

數列的收斂定義, 從一個以數列為主觀的角度 (一組數列逼近於某個定數), 跳躍到以極限值為主觀的角度 (某個數被一組數列無限密集地圍繞). 這個角度的敘述固然精簡美麗, 但是不容易被我們拿來檢驗一個數列是否收斂. 因為通常我們難以預測那個極限值.

所以, 在實用上, 我們須要一些理論, 用以檢驗一個數列是否收斂. 一旦確定其收斂性, 就可以用電子計算機來估計其極限值. 如果所討論的數列是實數數列 (在此, 若沒有特別說明, 我們總是討論實數數列), 那麼根據實數的完備性, 漸增但有上界, 或是漸減但有下界之數列均收斂. 這是我們學習的最基本檢驗法. 此外, 我們還知道了, 如何利用比較的辦法, 得知一個數列必發散. 另一個基本的比較辦法, 是所謂的**夾擊定理**.

> 令 $\underline{s}_n$, x_n, $\bar{s}_n$ 爲三數列且符合
>
> $$\underline{s}_n \le x_n \le \bar{s}_n .$$
>
> 若 $\lim \underline{s}_n$ 與 $\lim \bar{s}_n$ 均存在且相等, 則 $\lim x_n$ 存在且等於前二者之極限.

這是一個很符合直覺的定理. 特別要注意**存在且相等**這段話. 如果不相等的話, 後面的結論就不正確了. 例如 $\underline{s}_n = -1 - (1/n)$, $\bar{s}_n = 1 + (1/n)$, 而 $x_n = (-1)^n$.

以後我們還會再講幾種比較性的收斂檢驗定理. 但是, 現在, 讓我們先回到微積分的核心問題. 我們要根據柯西為**曲線下面積**所下的定義來證明柯西的積分理論 (閉區間上的連續函數必可積), 然後在這種基本型式下證明**微積分基本定理**. 這個定理告訴我們, 微分與積分互為反運算. 因此, 求反導函數也就是求積分的基本方法* 在這門課裡, 我們將不去證明更一般型式的微積分基本定理.

子數列

給一個數列 $\{x_n\}$, 通常足標 n 的次序就有如自然數的次序: 1, 2, 3, $\cdots$. (有時候從 0 開始, 有時候甚至從某個負整數開始.) 如果我們按照原來 $\{x_n\}$ 的次序, 任意挑一些數形成一個新的數列, 例如

$$x_1, x_3, x_5, x_7, \cdots \text{ 或 } x_3, x_1 9, x_2 2, x_7 2, \cdots .$$

這些從 $\{x_n\}$ 中按照順序挑出來的數列, 都稱作 $\{x_n\}$ 的**子數列**. 在符號上, 子數列記做 $\{x_{n_k}\}$, 其中 n_1, n_2, n_3, $\cdots$ 是子數列的足標, k 是按照自然數的次序, 而 n_k 就是被挑出來

---

* 其實這幾乎是我們僅有的方法; 用電子計算機算得的只是積分的估計值, 而非積分值.

的那些足標, 例如

$$n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 7, \cdots \text{ 或 } n_1 = 3, n_2 = 19, n_3 = 22, n_4 = 72, \cdots.$$

子數列的一個最基本性質就是:

收斂數列之子數列必收斂.

一個數列 $\{x_n\}$ 有無窮多項. 如果這無窮多項都被限制在一個有界的區間之內. 也就是說, 存在某二數 $L \le M$, 使得

$$L \le x_n \le M, \quad \forall n.$$

那麼, 直覺上, 似乎無窮多項的數列就應該會擠在一起. 這個數列本身倒不一定會收斂, 因為它們可能會擠成兩堆. 例如, $x_n = (-1)^n$ 這個數列, 奇數項都是 -1, 而偶數項都是 1. $\{x_n\}$ 本身不收斂, 但是, 它的子數列 $\{x_{2k}\}$ 和 $\{x_{2k+1}\}$ 都收斂 (分別常數數列 $\{1\}$ 和 $\{-1\}$). 這個現象可以推展到一般的情況:

有界數列必有一收斂之子數列.

這是所謂的**有界數列定理**.

再談連續性

在數學分析理論 (也就是以無窮數列, 實數的完備性, 微積分為基礎的一套數學分支) 之中, 我們常常關心這樣的命題: 什麼樣的數學結構和極限可交換? 例如我們已經看過這樣一個問題, 什麼時候

$$\lim \int f_n \, dx = \int \lim f_n \, dx?$$

現在, 我們要問一個更基礎的問題: 如果 x_n 是一個收斂數列, 什麼樣的函數會使得

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)?$$

假如 $\lim x_n = \xi$ 而且 $f(x)$ 在 ξ 連續, 回顧連續函數的 ϵ-δ 定義, 我們宣稱

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi).$$

任給 $\epsilon > 0$, 由 $f(x)$ 的連續性, 找得到一個 $\delta > 0$ 使得若 $|x - \xi| < \delta$ 則 $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$. 由 x_n 的收斂性, 找得到一個 $N > 0$ 使得若 $n > N$ 則 $|x_n - \xi| < \delta$. 故存在一個 $N > 0$ 使得若 $n > N$ 則 $|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon$. 由數列收斂的定義, $f(\xi)$ 就是數列 $f(x_n)$ 的極限.

其實, $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ 這個敘述和早先說的連續函數的 ϵ-δ 定義是等價的. 有些人會以這個敘述來作為函數連續的定義. 我們不這麼說的原因是希望能, (1) 早一點接觸 ϵ-δ 論證, (2) 早一點介紹連續函數, 使得對它能建立一點直覺.

閉區間上的連續函數

所謂柯西的積分理論是什麼呢? 就是說閉區間上的連續函數必可積. 可積的意思就是曲線下的面積有限. 而曲線下面積的意思又是什麼呢? 根據柯西自己提出來的定義, 那就是曲線的 (今天所稱的) 黎曼和數列收斂. 那麼, 柯西的積分理論有什麼需要證明的呢? 最基本的, 我們須要證明如果 $f(x)$ 是個在 $[a,b]$ 區間上連續函數, 則其黎曼和數列必收斂.

我們已經認真學習了有關數列收斂性的課題. 現在, 我們要特別關注於閉區間上的連續函數, 看看它們有什麼特性.

閉區間上的連續函數有三大特性: **最大值定理**, **中間值定理**, 和**均勻連續**.

所謂最大值定理就是說閉區間上的連續函數有最大值 (maximum):

> **若** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **中連續, 存在** $c \in [a,b]$ **使得**
>
> $$f(x) \le f(c), \quad \forall x \in [a,b].$$

注意, 這裡談的是最大值, 而非相對極大值. 當然最大值有可能恰好發生在相對極大值 (如圖三十三), 但是未必 (如圖三十四).

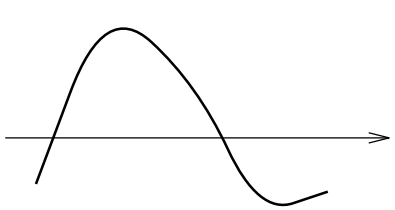

Fig 33

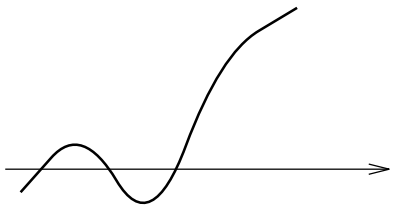

Fig 34

閉區間中的不連續函數未必有最大值, 例如下面的兩種情況: 可補救 (如圖三十五) 與不可補救 (如圖三十六) 的不連續.

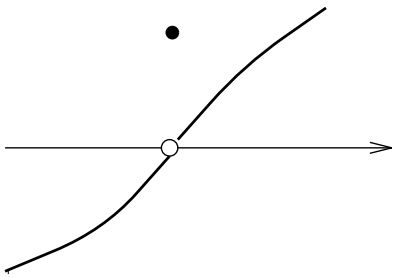

Fig 35

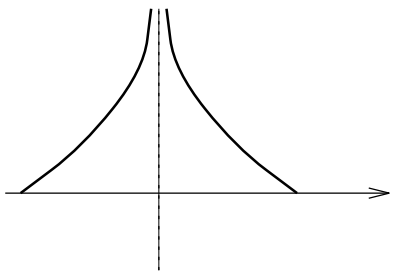

Fig 36

開區間中的連續函數未必有最大值, 例如 $\frac{1}{x}$ 在開區間 $(0,1)$ 中是連續函數, 但是顯然它在此區間內沒有最大值.

所謂中間值定理就是如果 $f(a) \neq f(b)$, 則 $f(x)$ 經過 (在 y 軸上) $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的每一個實數. 簡單而嚴格的說法如下.

> 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中連續且 $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, 則存在 $c \in [a,b]$ 使得
>
> $$f(c) = 0.$$

顯然這也不是一般的函數都符合的性質. 例如圖三十五中的函數就沒有這個性質.

這兩個定理都很符合直覺上的認知. 但是所謂的均勻連續性就比較抽象了. 首先我們定義什麼叫做均勻連續, 注意它和在某點連續的定義有何不同?

> 如果對所有的 $\epsilon > 0$, 都找得到 $\delta > 0$, 使得 $[a,b]$ 中任兩點 x_1, x_2, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 必有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中均勻連續.

並非所有連續函數都是均勻連續. 例如 $1/x$ 在 $(0,1)$ 中連續, 但是固定間隔的兩點間的函數值差距卻是越靠近 0 點越大. 而所謂均勻連續的含義就是, 任給一個 $\epsilon > 0$, 都可以找到一個 $\delta > 0$, 使得當我們以 δ 在 $[a,b]$ 上做 (盡量) 均勻的分割時, $f(x)$ 在每一段小區間之中的變化量都不會超過所要求的 ϵ.

習題 10

10.1 用 ϵ-N 論證, 證明夾擊定理.

10.2 如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}.$$

用 ϵ-N 論證, 證明若 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任意一個子數列, 則必

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \hat{x}.$$

10.3 如果 $f(x)$ 對每一個收斂到 ξ 數列 x_n 都符合 $\lim f(x_n) = f(\xi)$, 試證明 $f(x)$ 在 ξ 連續. (我建議您試試看反證法. 如果 $f(x)$ 在 ξ 不連續, 則用其 ϵ-δ 定義的反敘述, 找到一個特殊的數列 x_n^*, 使得 x_n^* 收斂到 ξ 但是 $\lim f(x_n^*)$ 不收斂到 $f(\xi)$. 故與原命題之敘述不符, 所以 $f(x)$ 不能在 ξ 不連續, 因此也就連續了.)

10.4 我們知道 x^2 在任一 $[a,b]$ 區間中為連續函數, 所以它也必然是均勻連續的. 請找出定義中的 δ 與 ϵ 的關係.

10.5 運用均勻連續的定義逆敘述, 證明 $1/x$ 在 $(0,1)$ 中非均勻連續.