Lecture 11

在這一堂課裡, 我們將運用所謂的二分法技巧, 證明一系列的數學理論.

有界數列定理

假設 $\{x_n\}$ 是個有界數列. 也就是說, 存在 $L \le M$, 使得

$$L \le x_n \le M, \quad \forall n.$$

那麼, 檢查 $[L, \frac{L+M}{2}]$ 和 $[\frac{L+M}{2}, M]$ 這兩個區間, 其中至少有一個含有無窮多個 $\{x_n\}$ 中的元素. [未完]

均勻連續定理

令 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中連續. 假設它不是均勻連續, 那麼就找得到某個 ϵ_0, 使得不論 $\delta > 0$ 有多小, 都找得到兩個 $x_1, x_2 \in [a,b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ 但是 $|f(x_1) - f(x_2)| \ge \epsilon_0$.

現在, 針對這個 ϵ_0, 令 x_n^1, x_n^2 為 $[a,b]$ 中的兩個點, 符合 $|x_n^1 - x_n^2| < 1/n$ 但是

$$|f(x_n^1) - f(x_n^2)| \ge \epsilon_0. \tag{1}$$

則在數列 $\{x_n^1\}$ 中, 若非有一個漸增的子數列, 就必須有一個漸減的子數列. 不管哪種情形, 都因為有上界或下界 (b 或 a) 而必收斂. (簡單地說, 因為 $\{x_n^1\}$ 是個有界的數列, 所以它必有一個收斂的子數列.) 假定 $x_{n_k}^1$ 是 x_n^1 中的一組收斂的子數列, 而且

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^1 = \eta \in [a,b].$$

同理 在數列 $\{x_n^2\}$ 中也有一個收斂的子數列 $x_{n_k}^2$. 由於 $\lim |x_n^1 - x_n^2| = 0$, 當然也有

$$\lim_{k\to\infty} |x_{n_k}^1 - x_{n_k}^2| = 0.$$

換句話說, $\lim x_{n_k}^1 = \lim x_{n_k}^2 = \eta$. 由 $f(x)$ 的連續性,

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^2)| = |f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^1) - f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^2)| = |f(\eta) - f(\eta)| = 0.$$

根據收斂的定義, 必定存在一個定數 $K > 0$, 使得凡是 $k > K$ 則 $|f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^2)| < \epsilon_0$. 這和 (1) 式矛盾. 故前面的非均勻連續之假設不成立, 所以就是均勻連續.

中間值定理

接著, 我們再一次利用所謂的二分法證明中間值定理. 其實這個證明的方法也是實際上以電子計算機估計零根的方法之一.

令 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的連續函數且 $f(a)\cdot f(b)\le 0$. 如果 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 則得證. 否則定義 $[a_1,b_1]=[a,b]$, 取中點 $m_1=(a_1+b_1)/2$. 如果 $f(m_1)=0$ 則得證. 否則定義

$$[a_2,b_2]=\begin{cases}[a_1,m_1] & \text{若 } f(a_1)\cdot f(m_1)\le 0,\\ [m_1,b_1] & \text{否則.}\end{cases}$$

依此類推, 若已經定義了區間 $[a_k,b_k]$, 則取 $m_k=(a_k+b_k)/2$, 而定義

$$[a_{k+1},b_{k+1}]=\begin{cases}[a_k,m_k] & \text{若 } f(a_k)\cdot f(m_k)\le 0,\\ [m_k,b_k] & \text{否則.}\end{cases}$$

這樣一來, 我們就有了一組層層相套的閉區間

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots.$$

根據實數的完備性, 這些閉區間有個非空集合的共同交集 $\cap[a_k,b_k]$. 但是因為

$$b_k-a_k=\frac{b_1-a_1}{2^{k-1}},$$

所以 $\lim b_k-a_k=0$, 亦即 $[a_k,b_k]$ 的長度趨近於零. 其實 $\cap[a_k,b_k]$ 之中只有一個點, 名之曰 c.

由於 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的每一點連續, 故

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)=\lim_{k\to\infty} f(b_k)=f(c).$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)\cdot f(b_k)=f(c)^2\ge 0.$$

但是由 $[a_k,b_k]$ 的建構程序, $f(a_k)\cdot f(b_k)\le 0$, $\forall k$. 如果其極限 $f(c)^2>0$, 這表示, 若取 $\epsilon=f(c)^2/2$, 則存在某數 K, 使得

$$f(a_K)\cdot f(b_K)>f(c)^2-\epsilon=\frac{f(c)^2}{2}>0,$$

矛盾. 所以 $f(c)^2=0$, 故 $f(c)=0$. 得證.

最大值定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中連續, 則根據其均勻連續性, 可以證明 $f(x)$ 的值域所成的實數 (非空) 子集合有上界. 根據實數的完備性而知其有最小上界, 名之曰 ω. 現在我們需要證明的是, 是否真的有一個點 $c\in[a,b]$, 達到 $f(c)=\omega$? 如果有的話, 則 $f(x)\le f(c)$, $\forall x\in[a,b]$, 就證得了最大值定理.

習題 11

11.1 證明最大值定理. 也就是, 證明真的有一點 $c \in [a,b]$, 達到 $f(c) = \omega$. [我建議您再一次使用二分法. 摹仿中間值定理的證明. 如果 $f(a) = \omega$ 或是 $f(b) = \omega$, 則得證. 否則定義 $[a_1, b_1] = [a,b]$, 令 m_1 為其中點. 若 $f(m_1) = \omega$, 則得證. 否則 $f(x)$ 在 $[a_1, m_1]$ 與 $[m_1, b_1]$ 中仍分別是連續函數. 故在此二區間中的值域亦各有一個最小上界. 由於 ω 是 $f(x)$ 在 $[a_1, m_1] \cup [m_1, b_1]$ 中的最小上界, 故上述的兩個最小上界, 至少有一個是 ω. 如果 $[a_1, m_1]$ 中的最小上界是 ω, 我們定義 $[a_2, b_2] = [a_1, m_1]$, 否則定義 $[a_2, b_2] = [m_1, b_1]$. 接下來, 您就應該知道如何進行了.]

11.2 模倣所謂的最大值定理, 敘述並證明一個**最小值定理**.