Lecture 12

柯西積分定理

所謂柯西積分定理就是說閉區間上之連續函數的黎曼和數列必收斂. 令 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中連續. 取 n 為一正整數, 我們先複習黎曼和 S_n 的定義. 將 $[a,b]$ 均勻分割成 n 個區段, 取其間隔為 $\Delta_n x$ 而分割點為 $\{x_0 = a,\, x_1,\, \cdots,\, x_n\}$. 令 ξ_k 是 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的任意一點, 則 n 段的黎曼和就是

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_n x.$$

我們要證明 $\lim S_n$ 存在.

取 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的最小上界, 名之曰 M_k. 取 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的最大下界, 名之曰 m_k. 令

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_n x, \qquad \underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_n x.$$

顯然

$$\underline{S}_n \le S_n \le \bar{S}_n.$$

現在, 只要證明了 $\lim \underline{S}_n$ 和 $\lim \bar{S}_n$ 分別存在且極限值相等, 就可以引用夾擊定理, 證明 $\lim S_n$ 存在 (而且其極限值, 也就是積分值, 等於 $\lim \underline{S}_n$ 或是 $\lim \bar{S}_n$).

我們先驗證 $\lim(\bar{S}_n - \underline{S}_n) = 0$.* 任給 $\epsilon > 0$. 由於 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中均勻連續, 所以存在 $\delta > 0$, 使得舉凡 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 則必 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon/(b-a)$. 現在, 我們選 n 足夠大使得 $\Delta_n x < \delta$, 則 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的變化量就 $< \epsilon/(b-a)$. 所以

$$|\bar{S}_n - \underline{S}_n| = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta_n x < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}\Delta_n x = \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta_n x = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n - \underline{S}_n = 0. \tag{1}$$

討論特殊的分割數 2^k. 我們很容易可以觀察

$$\underline{S}_1 \le \underline{S}_2 \le \bar{S}_2 \le \bar{S}_1, \tag{2}$$

依此類推可以得到

$$\underline{S}_1 \le \underline{S}_2 \le \underline{S}_4 \le \underline{S}_8 \le \cdots \le \bar{S}_8 \le \bar{S}_4 \le \bar{S}_2 \le \bar{S}_1.$$

---

* 光是這樣還不能說 $\lim \bar{S}_n = \lim \underline{S}_n$, 因為我們還不知道 $\lim \bar{S}_n$ 和 $\lim \underline{S}_n$ 是否各自存在. 比如說, $\lim(n-n) = 0$, 但是 $\lim n$ 卻是發散的.

故 $\underline{S}_{2^k}$ 是個漸增有上界之數列, 而 $\bar{S}_{2^k}$ 是個漸減有下界之數列. 根據實數的完備性, 此二數列各自收斂. 根據 (1) 式, 我們可以論斷它們收斂到同一個數, 名之曰

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}_{2^k} = \lim_{k\to\infty} \bar{S}_{2^k} = L.$$

回到一般的分割數 n. 利用類似 (2) 式的觀察, 對任何 n 和 k, 都有以下的關係

$$\underline{S}_{2^k} \le \underline{S}_{n\times 2^k} \le \bar{S}_{n\times 2^k} \le \bar{S}_{2^k}. \tag{3}$$

夾擊之, 得

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}_{n\times 2^k} = \lim_{k\to\infty} \bar{S}_{n\times 2^k} = L.$$

但是與 (3) 同理可得

$$\underline{S}_n \le \underline{S}_{n\times 2^k} \le \bar{S}_{n\times 2^k} \le \bar{S}_n.$$

對 k 取極限後得

$$\underline{S}_n \le L \le \bar{S}_n, \quad \forall n.$$

所以

$$0 \le L - \underline{S}_n \le \bar{S}_n - \underline{S}_n.$$

對 n 取極限, 由 (1) 之結論, 得到

$$0 \le \lim_{n\to\infty} L - \underline{S}_n \le 0.$$

所以 $\lim \underline{S}_n = L$, 那麼 $\lim \bar{S}_n$ 也就跟著存在了, 極限亦是 L.

此處寫的證明和柯西在 1823 年首度提出的證明不盡相同. 但是觀念上都牽涉到了最基本的兩件事情: (1) 實數的完備性, (2) 閉區間上的連續函數必為均勻連續. 在柯西的年代, 他理所當然地引用了這兩個觀念, 卻沒花工夫去說明. 也許可以說, 在那個年代, 數學還沒有發展到這種觀念上的細節.

這個積分定理和古老的面積觀念是相容的. 比如說, 根據這個定理計算長寬為 ℓ, w 的矩形面積仍是 ℓw.

微積分基本定理

我們只討論 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的連續函數的情形.

由最大值與最小值定理, 存在 m 和 M,

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a,b].$$

根據黎曼和的定義,

$$m(b-a) \le S_n \le M(b-a), \quad \forall n.$$

對 n 取了極限之後 (前面證明了, 這個極限值存在), 就有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

令

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

則

$$m \le \mu \le M.$$

根據中間值定理, 存在 $\xi \in [a,b]$, $f(\xi) = \mu$. 結論是, 存在 $\xi \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

稱之為**積分平均值定理**.

定義積分函數

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

例如當 $[0,1]$ 之間 $f(x) = 1$ 的時候, $F(x) = x$. 由積分平均值定理, 存在 $\xi \in [x, x+h]$ $(h > 0)$,

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)h.$$

所以, 根據 $f(x)$ 的連續性,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+} f(\xi) = f(\lim_{h\to 0^+}\xi) = f(x).\end{aligned}$$

可證當 $h < 0$ 的狀況亦同. 所以,

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

或寫成

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

這就是第一形式的微積分基本定理. 它說明了

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

的對應關係. 換句話說, 積分與微分互為逆運算. $F(x)$ 的導函數是 $f(x)$, $f(x)$ 的反導函數是 $F(x)$.

如果我們令 $G(x)$ 是任意一個具有 $G'(x) = f(x)$ 性質的函數. 則由微分的線性關係, 我們知道

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = \frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}G(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

所以我們確定的是 $F(x) - G(x)$ 的導函數是 0. 因此 $F(x) - G(x)$ 未必是 0, 只能說 $F(x) - G(x)$ 是個常數, 且稱之為 c. 所以

$$F(x) = G(x) + c.$$

但是

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 = G(a) + c.$$

所以這個 c (隨 G 而改變) 必定是 $c = -G(a)$. 亦即

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a).$$

於是我們得到所謂第二形式的微積分基本定理:*

若 $F(x)$ 是任意一個具有 $F'(x) = f(x)$ 性質的函數, 則

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

我們利用這個定理來求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間的定積分的值.

習題 12

12.1 證明 $\underline{S}_1 \le \underline{S}_2 \le \bar{S}_2 \le \bar{S}_1$. 這叫做共同細分割關係. (如果你發現很難嚴格地說清楚, 至少舉例說明.)

12.2 如果一個收斂數列 x_n 的每一項都符合 $x_n < A$, 並不表示 $\lim x_n < A$. 例如 $-1/n < 0$, 但是 $\lim -(1/n) = 0$. 一般而言, 我們可以證明的是, 如果 $x_n < A$, $\forall n$, 則 $\lim x_n \le A$. 證明之. [注意, x_n 不必是漸增或漸減的. 其實我們的講義中已經證過類似的現象了, 你找得到嗎?]

12.3 若 $\xi \in [x, x+h]$, 為什麼 $\lim_{h\to 0}\xi = x$? 你的最嚴格的解釋是什麼?

12.4 拿回家做**第一次小考**, 作為期中考的模擬考.

---

* 我們把 G 的名字換成了 F, 把 x 換成了 b.