Lecture 13

微分技巧

牛頓之於微積分的突破性貢獻, 除了微積分基本定理之外, 就是發現了許多基本函數的微分公式. 而萊布尼茲的導函數符號, 幫助許多人輕鬆地記住微分技巧的公式. 由於積分與微分互為反運算, 掌握了微分的技巧, 也就幾乎掌握了積分的技巧.

讓我們回顧, $f(x)$ 在某點 ξ 可微的定義就是 $f(x)$ 在 ξ 的導數存在, 也就是說,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \tag{1}$$

的極限值存在. 這種如 (1) 式中求極限的動作叫做微分, 而其極限值記作

$$f'(\xi).$$

如果我們在數學上確定了 $f'(\xi)$ 的存在性, 則可以用計算機估計其值. 比如說, 可以定義數列

$$d_n = \frac{f(\xi+\frac{1}{n})-f(\xi)}{\frac{1}{n}},$$

並計算 $n = 1, 2, 4, 8, \ldots$ 等值, 觀察其收斂情形, 一直到 $\{d_n\}$ 的十進位表示數都穩定於某些定數為止.

如果 $f(x)$ 在某個開區間 (a,b) 中的每一點都可微, 則稱 $f(x)$ 在 (a,b) 上可微. 在此情況下, 可以將

$$\xi \in (a,b) \mapsto f'(\xi)$$

的映射定義成一個新的函數, 稱為 $f(x)$ 對 x 微分的導函數. 以萊布尼茲符號, 記作

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad x \in (a,b).$$

亦簡記作

$$f'(x), \quad x \in (a,b).$$

而 $f(x)$ 在 ξ 的導數就記作

$$f'(\xi) = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=\xi}.$$

如果某個函數 $f(x)$ 在 (a,b) 內可微而且, 我們知道它的導函數 $f'(x)$, 則我們就不需要運用計算機來估計 $f'(\xi)$ 的值, 我們可以 (至少在數學意義上) 準確地知道 $f'(\xi)$ 的值; 也就是把 $f'(x)$ 代入 $x = \xi$.

有哪些可微函數可以寫出其導函數呢? 所有的基本函數都可以.*

讓我們從冪函數開始. 令 $f(x) = x^n$, 其中 n 是個正整數. 則由微分的定義, 以及二項展開公式, 我們得到

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad 1 \leq n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

(當 $n = 0$, 也就是常數函數的微分, 是 0.)

由微分的定義, 我們輕易可以證明, 微分具有線性性質. 也就是說,

如果 $f(x)$ 可微而 c 是一實數, 則 $cf(x)$ 亦可微, 而且

$$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x).$$

和

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均可微, 則 $f(x) + g(x)$ 亦可微, 而且

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x).$$

由此可知, 多項式均可微,

$$\frac{d}{dx}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

由

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) \\ &\quad + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= (f(x+h) - f(x))\,g(x+h) + f(x)\,(g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

可以推得微分乘法律

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均可微, 則 $f(x)g(x)$ 亦可微, 而且

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = (\frac{d}{dx}f(x))\,g(x) + f(x)\,(\frac{d}{dx}g(x)).$$

可以簡記作

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

---

* 或許, 這是它們之所以被成為基本函數的原因吧?

另一個簡單的記憶方式是,

$$\frac{d}{dx}x^{m+n} = (m+n)x^{m+n-1} = mx^{(m-1)+n} + nx^{m+(n-1)} = (\frac{d}{dx}x^m)\,x^n + x^m\,(\frac{d}{dx}x^n).$$

所以, 如果需要求 $(x+1)(x^2+x+1)$ 的導函數, 不須先將兩個多項式乘開, 直接算

$$\frac{d}{dx}(x+1)(x^2+x+1) = x^2+x+1+(x+1)(2x+1)$$

即可.

反函數微分律及串聯微分律 (chain rule) 是萊布尼茲符號的最極至表現.

如果 $y = f(x)$ 可微且其反函數 $f^{-1}(y) = x$ 存在, 則其反函數亦可微, 而且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

例如 n 是正整數, 則開方根函數

$$y = x^{\frac{1}{n}}$$

的反函數是

$$x = y^n.$$

所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}y^n = ny^{n-1}.$$

因此

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}. \tag{3}$$

如果 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均可微且 g 之值域在 f 之定義域內, 則其合成函數 $f(g(x))$ 亦可微, 而且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \quad \text{where } y = f(z), \quad z = g(x).$$

例如, 令 m 是一個正整數,

$$y = x^{\frac{m}{n}}$$

就可以想作

$$y = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

更正式一點說, 就是

$$y = z^m, \quad z = x^{\frac{1}{n}}.$$

所以, 根據串聯微分律,

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{m}{n}} = \frac{d}{dz}z^m \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = mz^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}. \tag{4}$$

串聯微分律幾乎是最重要的微分技巧. 比如說, $\sqrt{1+x^2}$ 可以想作

$$y = \sqrt{z}, \quad z = 1 + x^2.$$

所以, 應用串聯微分律,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{d}{dz}z^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}1 + x^2 = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

如果 x 是一個自變量, y 隨著 x 而改變, 通常我們把 y 和 x 之間的關係寫成一個函數形態

$$y = f(x).$$

如果能寫成這個樣子, 我們稱 $f(x)$ 是 y 的顯函數表達. 例如上半單位圓的顯函數表達是

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

而下半單位圓的顯函數表達則是

$$y = -\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

這樣的圓的表達式固然精確, 但顯得冗長. 我們有另一種表達式, 例如熟知的

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

這時候自變量 x 和其隨變量 y 混合寫在一個式子裡面, 比如說 $f(x, y) = 0$. 我們稱 $f(x, y)$ 是 y 的隱函數表達.

所謂隱函數微分, 就是將以上所知的各種微分律應用在

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = 0$$

上面, 並因為 $dx/dx = 1$, 所以最後留下一個以

$$\frac{dy}{dx}$$

為未知量的等式. 由此求 dy/dx. 例如

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

故解得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

若代入上半圓的顯函數, 則得

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

您可以用串聯微分律驗證這個結果.

到此為止, 根據 (2), (3), (4) 式, 我們知道, 當 r 是個正有理數時

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}.$$

那麼, 令

$$y = \frac{1}{x^r} = x^{-r},$$

寫成隱函數即是

$$x^r y = 1.$$

所以

$$\frac{d}{dx}x^r y = rx^{r-1}y + x^r\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{d}{dx}1.$$

解得

$$\frac{d}{dx}x^{-r} = \frac{dy}{dx} = -r\frac{1}{x}y = -rx^{-r-1}.$$

所以, 我們看到

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \quad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

(注意當 $r = 0$ 的時候, 右端是 0.)

最後, 利用乘法律, 串聯微分律以及 x^{-1} 的微分公式, 我們可以得到除法律.

如果 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均可微且 f/g 有定義, 則 f/g 亦可微且

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

實冪數

我們曾經說過, 在觀念上, 我們只知道如何計算以有理數為冪數的冪函數. 因為有理冪數只是做整數乘方和整數開方的算術. 那麼我們該如何定義實數的冪次呢? 比如說 $x^{\sqrt{2}}$. 現在, 我們可以回答這個問題.

首先, 根據實數完備性的觀念, 我們可以理解, 每個無理數都可以成為一個漸增 (減) 有上 (下) 界的有理數數列的極限. 換句話說, 每個無理數都可以被一個漸增 (減) 有上 (下) 界的有理數數列所逼近. 例如我們熟知的 $\{q_n\}$ 數列 $(n \geq 2)$ 就可以拿來逼近 $\sqrt{2}$.

其次, 我們可以輕易看出, 指數函數 $f(r) = x^r$ 應該是個連續函數. 根據連續性, 如果 $\lim r_n$ 收斂, 則

$$\lim_{n\to\infty} x^{r_n} = x^{\lim r_n}.$$

例如

$$x^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} x^{q_n}.$$

所以, 當 r 是個無理數的時候, 我們可以定義 x^r 就是 x^{r_n} 的極限, 其中 $\{r_n\}$ 是一個有理數數列, 而 $\lim r_n = r$. 從逼近的角度來看, 如果 $\tilde{r}$ 是個很靠近 r 的有理數, 則由連續性, $x^{\tilde{r}}$ 也就很靠近 x^r. 例如 $x^{1.414}$ 靠近 $x^{\sqrt{2}}$. 所以, 在計算上, 我們總是選一個靠近實數 r 的有理數 $\tilde{r}$, 用 $x^{\tilde{r}}$ 來估計 x^r.

由於 rx^{r-1} 也顯然是個 r 的連續函數. 所以, 當 r 是無理數的情形, 也可以如同上述的作法來定義 rx^{r-1}. 因此, 我們可以結論:

對所有 $r \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}.$$

習題 13

我們將以電腦程式來計算較為複雜的微分. 我們將選擇一百題最基本形式的微分問題, 同學們至少須會以紙筆做這一百題的演算. 這裡有四十題. 這些演算習題不必交, 我們將以小考的形式驗收. 課本 **197** 頁習題 1–7, 10–18, 30. 課本 **210** 頁習題 8, 9, 11, 13–19. 課本 **215** 頁習題 1–5. 課本 **232** 頁習題 1–4, 9–11. 課本 **237** 頁習題 3.

13.1 推導微分的除法律.

13.2 課本 **4.2** 習題 31, 42.

13.3 課本 **4.4** 習題 27, 29, 30.

13.4 課本 **4.5** 習題 33.