Lecture 14

冪函數的微分與積分

前面我們冪函數微分的種種情況都仔細地檢查了一遍, 發現一個一致的公式

對任何 $0 \neq r \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}.$$

從這個微分公式, 再利用微積分基本定理, 我們也得到了一套基本的積分公式.

對任何 $0 \neq r \in \mathbb{R}$,

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C.$$

其中 C **任意常數**.

這種有個任意常數的型式, 又稱為**不定積分**. 它是個一般性的公式. 但通常我們在應用的時候, 都是需要某函數在某區間內的積分, 那就稱作**定積分** (definite integral). 用定積分的型式再寫一遍冪函數的積分公式, 就是

對任何 $0 \neq r \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}\Big|_a^b = \frac{1}{r+1}(b^{r+1} - a^{r+1}).$$

對於 $r = 0$ 的特殊情形, 也就是常數函數的情形. 我們知道常數函數的微分是 0. 因為它沒有變化, 所以變化率是零. 於是 0 的反導函數, 或說不定積分, 是任意一個常數函數. 但是 0 的定積分值必是 0, 因為它的曲線下沒有面積.

三角函數的微分公式

現在, 我們有了最基本的兩套微分公式: $1' = 0$ 和 $(x^r)' = rx^{r-1}$. 讓我們利用微分的定義和幾個基本的定律, 來推導三角函數的微分公式.

首先當然要說到 $\sin x$, 它幾乎代表了所有的三角函數. 在這裡, 我們的 x 都是以徑度量來測度的. 也就是說, x 是單位圓上對應某個張角的的圓周長度. 所以, 360° 就是 2π. 一個基本的幾何公式說, 以 x 為 (徑度量) 張角, r 為半徑的扇形面積是

$$\frac{1}{2}xr^2.$$

(一整個圓就是 $x = 2\pi$ 的扇形.) 如下圖.

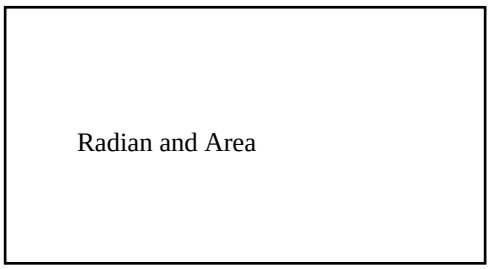

Fig 37

對任一個 x, 由定義, 若

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \tag{1}$$

收斂, 則 $\sin x$ 可微且導數為其極限. 利用基本的和差化積公式,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

如果

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \text{ 和 } \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

分別存在, 則 (1) 式中的極限就會存在.

有的同學或許這時候會想到一個稱為羅必達法則的公式. 我想, 我們還不需要這種時髦的東西. 讓我們欣賞一個古典的做法.

參照圖三十八.

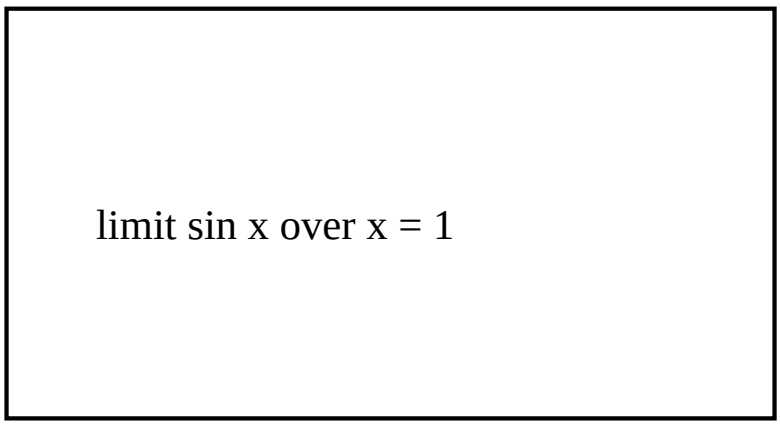

Fig 38

圖中的角度是 x, 扇形 OAB 的半徑是 1. 換句話說, 弧線 AB 的長度是 x. OB 射線與 OA 的垂直線相交於 D. 很明顯地,

三角形 OAB 的面積 $\leq$ 扇形 OAB 的面積 $\leq$ 三角形 OAD 的面積.

由於 OB 的長度是 1, 根據 sin 的定義, 三角形 OAB 的高是 $\sin x$. 由於 OA 的長度是 1, 根據 tan 的定義, 三角形 OAD 的高, 也就是 AD 的長度, 就是 $\tan x$. 所以,

$$\frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x.$$

當 x 足夠小而又 $\neq 0$, 比如說 $0 < x < \pi/2$, 則 $\sin x > 0$. 於是可得

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x},$$

或者

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

因為 $\cos 0 = 1$, 所以顯然由夾擊定理得

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

當 $\pi/2 < x < 0$ 的情形, 也可以得到一樣的結果, 就不多說了. 所以我們結論

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

現在, 用一個類似有理化分子的基本技巧,

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-1}{\cos x + 1} \cdot \sin x. \tag{2}$$

因為 (2) 式右邊的三項分別取 $x \to 0$ 的極限存在, 依序是 1, $-\frac{1}{2}$ 和 0, 所以

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos x + 1} \cdot \lim_{x\to 0} \sin x = 1 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 0 = 0.$$

現在, 我們只是把趨近於 0 的變數從 x 換到 h, 就得到

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.\end{aligned}$$

因此, 得到了三角函數的基本微分公式:

$\sin x$ **在任何點** x **都可微, 而且**

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

這個簡單的公式, 只有當 x 是徑度量的時候才對. 或許這是為什麼我們用徑度量的原因吧.

速度的競賽

讓我們且慢推衍其他的三角函數微分公式. 再回頭多看一眼

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 和 } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0. \tag{3}$$

當 $x\to 0$ 的時候, $\sin x$, $\cos x-1$ 和 x 都是趨近於 0 的. 而它們的比值卻有不同的極限, 這代表了什麼意義?

讓我們看一些更簡單的情形. 當 $x\to 0$ 的時候, x 和 x^2 都是趨近於 0 的.* 但是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty(\text{就是發散的意思}).$$

在這裡, 我們要提出速度的看法. 固然 x 和 x^2 都趨近於 0, 但是速度不同. 直覺上, 我們會同意 $x^2\to 0$ 的速度遠快於 $x\to 0$ 的速度. 所以, 在 $\frac{x^2}{x}$ 中, 分子趨近於 0 的速度遠快於分母趨近於 0 的速度. 因此極限是 0. 在 $\frac{x}{x^2}$ 中, 分母趨近於 0 的速度遠快於分子趨近於 0 的速度. 因此發散. 但是直覺上感到 $0.00001x\to 0$ 的速度比 $x\to 0$ 的速度快, 就要稍作修改. 因為

$$\lim_{x\to 0}\frac{0.00001x}{x}=0.00001,$$

我們說 $0.00001x\to 0$ 的速度和 $x\to 0$ 的速度一樣快 (或一樣慢), 而當它們都趨近於 0 的時候, 它們保持一定的比例, 也就是 0.00001. 這個比例常數的重要性, 遠遠比不上冪次的重要性. 比如說 $0.00001x$ 和 $x^{1.00001}$ 來比,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{1.00001}}{0.00001x}=\lim_{x\to 0}x^{0.00001}=0.$$

可見 $x^{1.00001}\to 0$ 的速度還是比 $0.00001x\to 0$ 的速度快得多.

現在, 我們就瞭解, (3) 式的意義就是, 當 $x\to 0$ 的時候, $\sin x\to 0$ 的速度和 x 本身趨近於 0 的速度一樣快, 而且比例常數是 1. 但是 $\cos x\to 1$ 的速度就遠快於 $x\to 0$ 的速度. 在一個習題裡面, 您將看到, 其實 $\cos x\to 1$ 的速度和 $x^2\to 0$ 的速度一樣快, 當然就遠快於 $x\to 0$ 的速度.

應用數學常常是記量的數學, 所以, 除了關心收斂不收斂的問題之外, 收斂的速度, 更是應用數學家或是科學家所要仔細研究的. 比如說, 當我們要用某個計算方法, 寫個電腦程式算出一個數列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim x_n$ 逼近某數 x. 在數學上, 當然需要證明 $\lim x_n=x$. 基於這種數學理論上的保證, 我們才能相信, 當 n 夠大之後 (也就是說, 電腦疊代了夠多次之後), x_n 的值就很靠近 x 的值. 這時候, 如果 $x_n\to x$ 的速度有如 $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ 的速度, 電腦要花 100,000,000 個疊代步驟才能得到 0.1% 誤差的估計值; 那麼, 如果 $x_n\to x$ 的速度有如

* 我們定義, $x\to y$ 這個符號, 就是語言上說 x 趨近於 y 的意思.

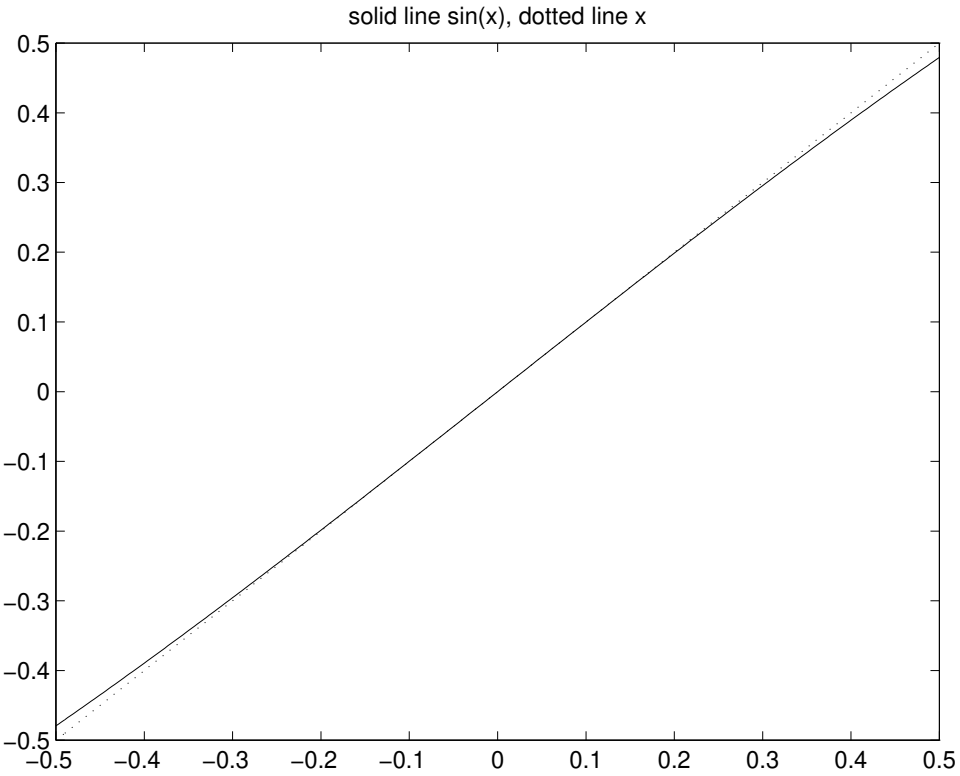

Fig 39

$\frac{1}{n^2} \to 0$ 的速度, 電腦可能只要花 100 個疊代步驟就能得到 0.1% 誤差的估計值了. 其間的差異, 真是非常的大.

再換個角度, $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ 的意義就是, 當 x 靠近 0 的時候 (我們記做 $x \approx 0$), $\sin x$ 很靠近 x. 參照圖三十九.

而經過一個簡單的變數變換, 可見

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

意思是說, 當 x 很大的時候, $\sin\frac{1}{x}$ 很靠近 $\frac{1}{x}$. 我們已經討論過, 當 x 靠近 0 的時候, $\sin\frac{1}{x}$ 急速地振盪. 但是, 顯然當 $x > 2/\pi$ 之後, $\sin\frac{1}{x}$ 就不再振盪. 現在我們更知道了, 當 $\sin\frac{1}{x}$ 就不再振盪之後, 它的圖形就像 $\frac{1}{x}$ 一樣緩降到 0. 參照圖四十.

三角與反三角函數的微分與積分公式

所有三角與反三角函數的微分公式, 都可以用 $\sin x$ 的微分公式配合微分律推衍出來. 理由很簡單, 因為所有三角函數都是從 sin 函數定義出來的. 例如 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (意思是, cos 函數與 sin 函數恰好差 $-\frac{\pi}{2}$ 的相位角). 利用串聯律, 令 $z = x + \frac{\pi}{2}$, 則

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dz}\sin z \cdot \frac{d}{dx}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x.$$

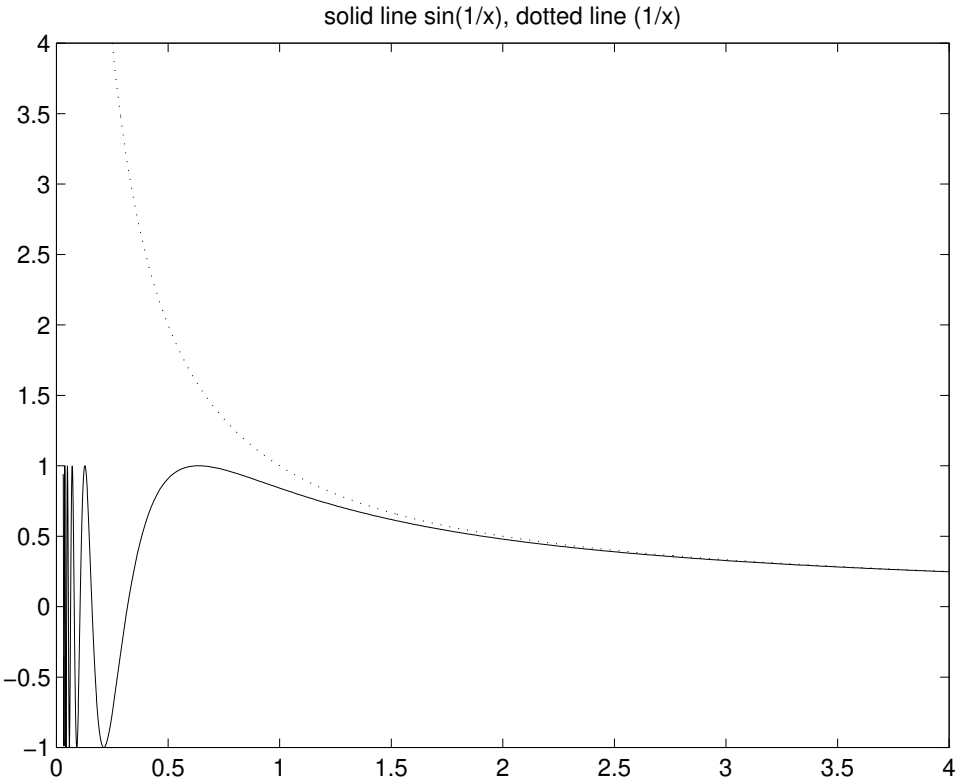

Fig 40

利用除法律,

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同時也就有了這些不定積分的公式

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$$

利用反函數微分律, 令 $x = \sin y$, 則

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}.$$

參考下圖之直角三角形 ABC,

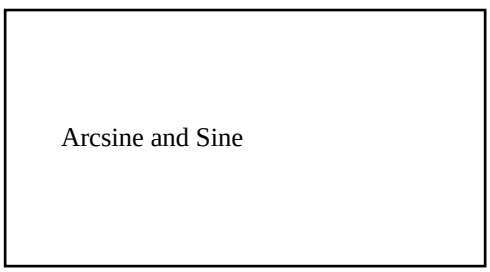

Fig 41

若斜邊 AC 之邊長為 1, BC 邊長為 x, 則底邊 AB 之邊長為 $\cos(\sin^{-1} x)$. 由畢氏定理得知 $\cos^2(\sin^{-1} x) + x^2 = 1$. 故

$$\frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

如果我們定義 $\sin^{-1}$ 的值域在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 則它是漸增函數, 所以應該取正值. 故

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

用完全一樣的想法, 我們得到 $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x$ 的值也應是

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

但是因為我們定義 $\cos^{-1}$ 的值域在 $[0, \pi]$, 故為漸減函數, 應取負值, 所以

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

所以, 其實我們也得到了一組不定積分公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + C \text{ 或者 } -\cos^{-1} x + C.$$

這看起來頗為可疑. 其實不然. 因為 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$. 可見, 前面的兩個公式都對, 只是那兩個 C 不一樣. 後面的 C 是前面的 $C + \frac{\pi}{2}$; 反正它們兩個 C 都是任意常數. 一般來說, 我們令

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + C, \quad x \in (-1, 1).$$

仍然是利用反函數微分律, 令 $x = \tan y$, 則

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\tan y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

對應的積分公式是

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C.$$

這個積分公式對所有的 x 均成立. 特別注意定積分

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x\Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

所以, 用數值方法去估計

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

的值, 也就相當於估計 π 的值.

習題 14

這裡再有二十五題演算. 這些演算習題不必交, 我們將以小考的形式驗收. 課本 **222** 頁習題 1–4, 6, 10, 11, 14, 19, 20. 課本 **228** 頁習題 13–16. 課本 **232ff** 頁習題 5, 8, 12. 課本 **238** 頁習題 11–16, 19, 21.

14.1 利用類似 (2) 式的技巧求

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

這意味著, 當 x 很靠近 0 的時候, $1-\cos x$ 靠近的圖形應該和什麼函數的圖形非常靠近呢? 再換句話說, 當 $x\to 0$ 時, $\cos x$ 趨近於 1 的速度和 x^n 趨近於 0 的速度一樣, 這個 n 是多少?

14.2 考慮下列函數, 把那些在 0 (右邊) 附近彼此非常靠近的分成一類. 如果必要, 你可以用 Maple 畫畫看. 但是你應該要可以不靠電腦而自己想得出來.

$$\begin{array}{cccc} x & \sqrt{x} & x^2 & \sin x \\ x\sin x & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} & x^3 \\ 1-\cos x & \sqrt{x^2+2x} & \frac{x^2}{x+1} & \frac{\sin x}{x}-1 \end{array}$$

14.3 因為

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

可見當 $x\to\infty$ 時, $\sin\frac{1}{x}$ 趨近於 0 的速度和 $\frac{1}{x}$ 趨近於 0 的速度一樣. 依據這個理由, 猜測以下三個極限問題是收斂還是發散?

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to\infty}x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}.$$

14.4 若 x 以角度量為單位 (0° 到 360°), 求 $\sin x$ 的微分公式.