Lecture 15

課本 4.3 歐拉數

Euler (1707–1783)* 是十八世紀最主要的數學家, 算是銜接在牛頓和高斯之間的一位數學巨人. 在他 1748 年出版的書 (或譯做"無窮小分析導輪") 裡, 首次提到了 e 這個常數. 今天, 常數 e 在科學界的重要性, 足以和常數 π 相當.

一般而言, $\frac{d}{dx}a^x = \alpha a^x$, 其中 α 是一個和 a 有關的固定常數. 課本以追求

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \text{ (也就是 } \alpha = 1)$$

為目標而推導了 e 的定義

$$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

歐拉當時用以下的論述,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum k=0^n \binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}(\frac{1}{n})^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3+\cdots+\frac{n!}{n!}(\frac{1}{n})^n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{n}{n}\frac{1}{1!}+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n^n}\frac{1}{n!}\right]
\end{aligned}$$

配合這樣的觀察 $(1 \le k \le n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} == \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) = 1, \quad (1)$$

導出了今天所謂的 e 的泰勒級數:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}. \quad (2)$$

回顧 (1) 式, 它表示當 n 很大的時候, n^n 和 $n!$ 差不多一樣大; 或說, $n^n \to \infty$ 的速度和 $n! \to \infty$ 的速度幾乎一樣快. 其實, 針對 n^n 和 $n!$ 的比較, 有一個更精確的 Stirling (1692–1770) 公式:

$$1 < \frac{n!}{n^n\sqrt{2\pi n}e^{-n}} < 1+\frac{1}{4n}, \text{ 當 } n \text{ 夠大的時候.}$$

---

* 可能您會看到某些中文書上將他的名字譯做尤拉, 這可能是不恰當的. Euler 應該以德文發音, eu 的音有如英文 boy 之中的 oy 所發的音. 所以, 我們譯做歐拉.

從 (2) 式, 我們看到

$$2 < e < 3.$$

所以 e 不會是一個整數. 假如 e 是有理數, 則 $e = \frac{k}{m}$, $k, m \in \mathbb{O}$, $m \neq 1$. 所以,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{k}{m} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots\right] \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} \\
&= \frac{1}{m \cdot m!}.
\end{aligned}$$

將上式通通乘上 $m!$, 則得

$$0 < k \cdot (m-1)! - m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{m} < 1.$$

但是 $k \cdot (m-1)! - m! \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}$ 是個整數, 不可能介於 0 和 1 之間, 故矛盾. 所以, e 是無理數. 由數值計算, 得到

$$e \approx 2.71828.$$

自然對數函數

我們已經知道, 指數函數 a^x $(a > 0)$ 必然有一個反函數, 我們稱它為對數函數 $\log_a x$. 特別是以 e 為底的對數函數 $\log_e x$, 稱為**自然對數函數**, 記做 $\ln x$. 它之所以**自然**, 是因為 (由反函數微分律)

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

所以

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C.$$

由於 $\ln 1 = 0$, 所以,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad (x > 0). \tag{3}$$

函數 e^x 和 $\ln x$ 很明顯地, 都是連續函數. 那麼, 對任意 (一個給定的) 實數 $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{x}{n}) = \lim_{n\to\infty} n\int_1^{1+\frac{x}{n}} \frac{1}{t}\,dt.$$

由積分平均值定理, 存在某數 ξ, $1 \le \xi \le 1+\frac{x}{n}$, 使得上式

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\xi}\frac{x}{n} = x.$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+\frac{x}{n})^n} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{x}{n})^n} = e^x.$$

類似於前面的歐拉論述方法, 我們可以得到

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\cdots. \tag{4}$$

由 (3) 和 (4) 式, 我們得到一對估計 $\ln x$ 和 e^x $(x > 0)$ 數值的計算方法. 由於它們計算上的方便, 任何指數與對數函數都是經由它們計算的:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad a^x = e^{x\ln a}.$$

也因此得到了最後一套基本微分公式:

對任意 $a > 0$, 指數函數 a^x 皆可微, 而且

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = \ln a\, e^x.$$

指數對數表, 計算機.

課本 2.8, 4.9 不可微的狀況

若函數 $f(x)$ 在 $\hat{x}$ 處不連續, 則必在此不可微. 但連續處未必可微. 大家可以已經熟知的例子是 $|x|$. 它是個連續函數, 但是在 $x = 0$ 處不可微.

如果 $f(x)$ 在 $\hat{x}$ 處可微, 那麼局部而言, $f(x)$ 的圖形大約就是其切線圖形: $y = f'(\hat{x})x + c$.

定幾個小數 $h > 0$, 在 $[\hat{x}-h, \hat{x}+h] \times [f(\hat{x})-h, f(\hat{x})+h]$ 正方格內畫出 $f(x)$ 的圖形, 若是在點 $(\hat{x}, f(\hat{x})$ 附近這個局部的圖形像是一條直線, 那就表示, $f(x)$ 很可能在 $\hat{x}$ 處是可微的; 而這條直線的斜率就是導數. 當然, 確實的情況, 還需要用數學上可微的定義來驗證.

例如, 觀察 $x\sin\frac{1}{x}$ 和 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 的小方格圖形 (圖四十二—四十五).

這四張圖都是以 $(0,0)$ 為中心: 圖四十二與四十三分別以 $h = 0.1$ 和 0.01 做方格半徑, 觀察 $x\sin\frac{1}{x}$; 圖四十四與四十五分別以 $h = 0.1$ 和 0.01 做方格半徑, 觀察 $x^2\sin\frac{1}{x}$.

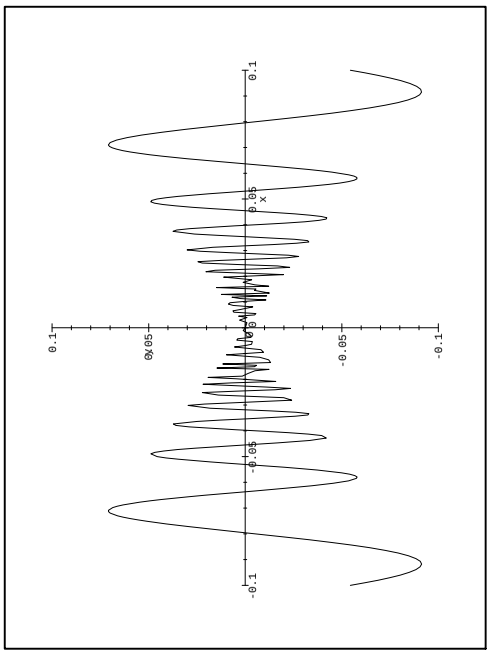

Fig 42

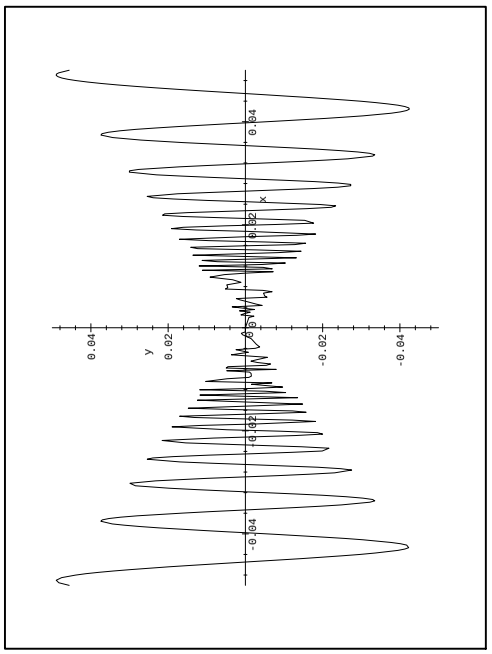

Fig 43

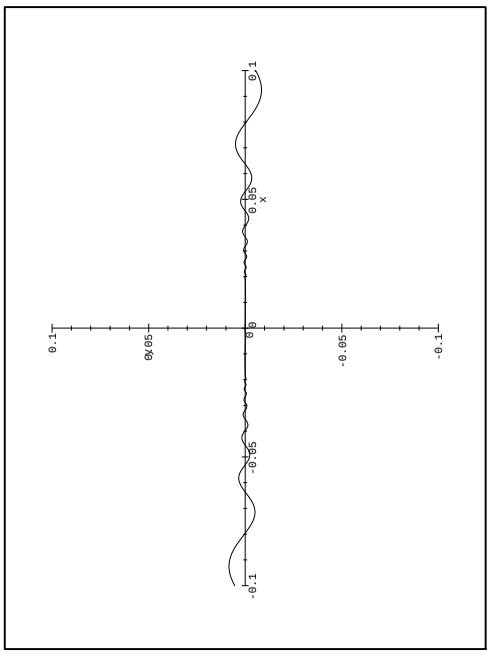

Fig 44

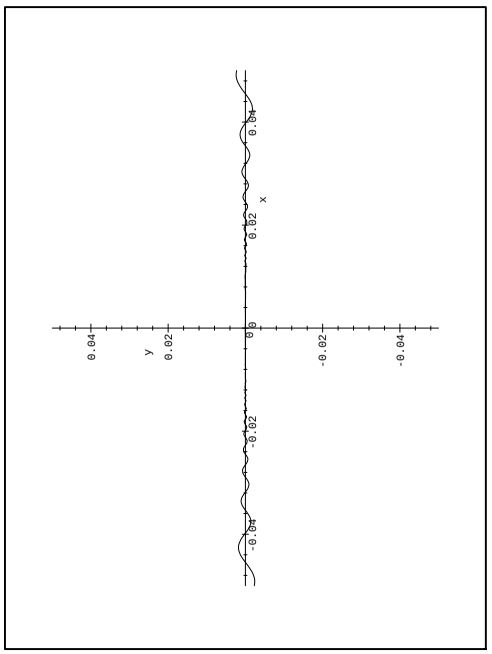

Fig 45

習題 15

這裡有最後三十五題演算. 這些演算習題不必交, 我們將以小考的形式驗收. 課本 **204** 頁習題 7–18. 課本 **210** 頁習題 3–7. 課本 **216** 頁習題 13–24. 課本 **228** 頁習題 5–8. 課本 **232** 頁習題 6, 7.

15.1 課本 **2.8** 習題 1.

$$f(x) = (x + |x|)^2 + 1 = \begin{cases} f_1(x) & \text{for } x \geq 0 \\ f_2(x) & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

請問 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 各是什麼函數? 函數 $f(x)$ 是否在 0 連續? 使用 Maple, 觀察 $f(x)$ 在 $[0 \pm h] \times [f(0) \pm h]$ 方格內的圖形. 畫 $x \sin \frac{1}{x}$ 的程式範例如下:

```
f := x*sin(1/x);
h := 0.1;
plot(f, x=-h..h, y=-h..h);
```

由這些圖形的觀察, 你認為 $f(x)$ 是否在 $x = 0$ 處可微? 請用微分的極限定義來驗證你的觀察.

15.2 課本 **2.8** 習題 6. 利用以下的 Maple 指令來觀察 $g(x)$ 圖形:

```
g := x -> if abs(x) <= 2 then (1 + cos(Pi*x/2)) else 0 fi;
plot(g, -3..3, -3..3);
```

注意這個函數的圖形如鐘 (Bell function). 回答課本上的 (a), (b) 兩個問題.

15.3 課本 **4.3** 習題 39 [證明 e^x 的圖形是向上凹, 所以函數圖形在切線的上方.], 習題 40.