Lecture 16

課本 1.8 複利和 e

當累進利息的次數越來越頻繁 (每年一次, 每季一次, 每月一次, 每週一次, 每天一次, 每小時一次, $\cdots$), 則存款 k 年後的

$$\text{本息} = (\text{本金}) \times (1 + \frac{kr}{n})^n \approx (\text{本金}) \times e^{kr}. \text{ (當 } n \text{ 夠大的時候)}$$

此中, r 是年利率 (比如說 6.25%, $r = 0.0625$), n 是一年中累進利息的次數.

課本 5.1 極大與極小

臨界點. 相對極大與極小, 絕對極大與極小. 函數漸增段落與漸減段落的判斷. 用圖形來輔助判斷, 如 250 頁 Example 4, 5.

課本 5.2 二次導數

$f''(\hat{x}) = 0$ 表示 $\hat{x}$ 是一次導函數 $f'(x)$ 的臨界點. 通常 (當 $f'(\hat{x}) \neq 0$), $f(x)$ 在此達到相對極大瞬間變化率, 或是相對極小瞬間變化率; 或者說, $f(x)$ 在此改變向上或向下凹的狀態. 否則 (當 $f'(\hat{x}) = f''(\hat{x}) = 0$), 就要比較詳細的檢查. 例如 x^3 和 x^4 在 $x = 0$ 處的表現.

第 259 頁 Example 7. 直覺上, 水面高度函數 $h(t)$ 如圖 5.28. 但是, 數學模型是一個積分方程式

$$\int_0^{h(t)} \pi g(y)^2 \, dy = rt.$$

其中 r 是液體灌入瓶中的速度, $g(y)$ 是瓶面的曲線, y-軸假設在瓶子的正中央, 而瓶子的每個水平切面都是一個圓 (半徑是 $g(y)$), y-軸的原點在瓶底. 我們現在還不會解這樣的方程式. 要提醒您, 作為一個工程師或科學家, 您就是要會解決這樣的問題.

課本 5.3 函數型錄

三次多項式所造成的曲線, 特別具有應用上的意義, 因為 CAD, outline font. 強阻尼振盪 xe^{-bx}, 一般阻尼振盪 $e^{-bx} \sin \nu x$. 漸近函數 $a(1 - e^{-bx})$. 常態分佈函數

$$e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}.$$

課本 5.4 一些經濟學名詞

成本函數 (Cost function $C(q)$, q: 貨物量 (quantity)). 收入函數 (Revenue function $R(q)$). 獲利函數 (Profit function $P(q)$). 邊際效應. 最大獲利點. 這些數學都是很簡單的. 問題是, $C(q)$ 和 $R(q)$ 的定量描述是非常困難的. 牽涉到人類社會制度, 生活習慣, 文化背景, 心理因素, 這許許多多很難量化的學問, 實在很難用數學來解釋或預測.

習題 16

16.1 課本 **5.1** 習題 13, 14 [或許你應該先用 Maple 畫個簡圖, 以幫助你判斷. 例如 `plot(sin(x)^2 - cos(x), x=0..Pi);`.]

16.2 課本 **5.1** 習題 23, 24.

16.3 課本 **5.2** 習題 17, 18, 22–25.

16.4 課本 **5.2** 習題 28, 29.

16.5 課本 **5.3** 習題 7, 8, 15. 這些問題所遇到的函數可能複雜了一點. 您或許可以開始練習利用 Maple 作為解決問題的幫手. 一些程式範例如下.

```
f := 1/((1-x^2)^2 + 2*x^2);
plot(f, x=0..10); (先觀看一個大概)
fp := diff(f,x);
solve(fp, x); (試試看能否算出臨界點)
plot(fp, x=0..10);
```

16.6 課本 **5.4** 習題 8.