# Lecture 18

## 課本 6.1 定積分

第二型式的微積分基本定理:

> **若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續且在 $(a,b)$ 內是 $f(x)$ 的反導函數; 亦即, 當 $a<x<b$, $F'(x)=f(x)$. 則**
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

## 課本 6.2 定積分之性質

已知的最基本不定積分 (反導函數) 公式:

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}+C, \quad r\neq -1.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C, \quad x\in(-1,1).$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad x>0.$$

從這些最基本的公式, 配合其他的函數關係, 例如三角函數的關係, 以及 $a^x = e^{x\ln a}$ $(a>0)$ 之類的, 再配合積分的規律, 我們可以找到某些函數的反導函數.

注意 $\int x^r\,dx$ 的積分公式只是個基本形式. 實際運算的時候要小心, 當 $r<0$ 的時候 $x^r$ 在 $x=0$ 是不可補救的不連續. 所以, 如果一個定積分的積分上下限跨過了 $0$, 就不能直接引用這個公式求其定積分值. 需要針對問題做更詳細的討論.

但是, 不是所有的可積函數都寫得出它的反導函數. 例如定義在 $[0,1]$ 區間內的 $e^{-x^2}$. 因為它顯然是個連續函數, 所以在 $[0,1]$ 內是可積的. 但是我們 (用基本函數) 寫不出一個 $F(x)$, 使得 $F'(x)=e^{-x^2}$. 像這種可積函數, 是不能用第二型式的微積分基本定理來求得其積分值的. 惟有使用電腦, 配合數值積分法, 才能求得其積分值的估計值.

積分運算的簡單規律: **逆向變號**, **銜接性**, **線性**, **保序**.

## 課本 6.3 反導函數的幾何感覺

練習從 $f'(x)$ 的圖形倒推 $f(x)$ 的圖形, 這是很有趣而且很有用的直覺訓練. 因為反導函數不唯一 (有個任意常數 $C$), 我們必須選定一個開始的值. 一旦這個值選定了, 整個反導函數曲線就唯一決定了 (如果存在的話). 其簡單的物理意義是, 假想 $f(x)$ 代表位移, $x$ 代表時間, 則 $f'(x)$ 代表速度. 如果我們知道速度 $f'(x)$, 而不知道此運動開始時的位置 (也就是 $f(0)$), 那麼我們不能確定時間 $x$ 時運動所在的位置. 若我們知道開始時的位置, 就可以確定時間 $x$ 時運動所在的位置. 看課本 Examples 1, 2, 3.

## 課本 6.4 初嚐微分方程

一個未知數, 知道它自己, 和其他已知函數之間的關係, 形成一個代數方程式. 例如

$$x^2 = x + 1.$$

求此未知數 $x$.

一個可微的未知函數, 知道它的導函數, 和它自己, 和其他已知函數之間的關係, 形成一個微分方程式. 例如

$$\frac{dy}{dx} = y + 1.$$

求此未知函數 $y = f(x)$. 比方說, 這個微分方程可以解釋成某個運動, 當時間 $x$ 時其速度是其位移加一; 求此運動軌跡. 或是一條曲線, 在 $x$ 處的切線斜率是其函數值加一; 求此曲線. 我們已經看到, 這一類的問題, 一定要有一個初始條件, 才有可能求得唯一解. 看課本 Example 3, 4.

花瓶注水問題, 導出積分方程式, 利用微積分基本定理, 從這裡再導出微分方程式.

## 課本 6.5 初嚐科學哲學

希臘時代, 亞理斯多德 (Aristotle) 認為運動的本質是**位置的變化**. 伽利略 (Galileo) 和牛頓引入了**慣性定律**,* 認為人無法分辨等速運動和靜止. 所以牛頓認為運動的本質應該是**速度的變化**, 也就是, **加速度**. $F = ma$ 定義了**力**就是在單位質量下速度的變化率; 或者說, **力**就是使得單位質量物體產生速度的變化的那個物理量. 就這個觀點來看, $F = ma$ 是一個**定義**, 不是一個**定律**. 這個定義, 配合萬有引力假設, 在數學上驗證了伽利略的自由落體實驗.

---

* 很明顯地, 在牛頓的時代, 沒有人真的能做慣性定律的實驗. 所以, 所謂慣性定律, 是一個經實驗驗證的物理定律呢? 還是一個數學上先驗的假設?

## 習題 18

我們並不特別強調微積分的演算技巧. 所以, 我們選擇最基本形態的一百題積分演算題, 建議各位練習. 這些演算題不必交驗, 我們將以考試的形式來驗收. 這裡有二十五題: 課本 **332ff** 頁習題 1–25.

**18.1** 課本 **6.2** 習題 4, 5.

**18.1** 課本 **6.3** 習題 1–4, 15–18.