Lecture 19

課本 7.2, 7.3 積分的變數變換法

從前一次的練習當中, 我們應當已經看到, 積分的演算不像微分一樣的規律化. 我們必須有"遠見"—我們要預估一個函數, 使得它的導函數是被積分函數. 有些情況是容易預見的, 例如求 $\int \cos 2x\,dx$, 我們很容易可以預見 $\frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x$, 把 2 除去, 就知道 $\cos 2x$ 的不定積分 (反導函數) 就是 $\frac{1}{2}\sin 2x + C$. 再例如求 $\frac{1}{2x-1}$ $(x > \frac{1}{2})$ 的不定積分, 因為我們很容易可以預見 $\frac{d}{dx}\ln(2x-1) = \frac{2}{2x-1}$, 把 2 除去, 就知道

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C.$$

但是, 如果要求 $3x^2\cos x^3$ 的不定積分, 就没有這麼單純了. 這時候, 我們必須熟練地使用微分的串聯律 (chain rule). 我們要預見 $\frac{d}{dx}\sin x^3 = 3x^2\cos x^3$, 才能得到不定積分 $\sin x^3 + C$. 把微分的串聯律熟練而巧妙地應用到求反導函數的問題上, 需要很多的練習. 剛開始學習的同學, 可以猜測一個 **變換因式**, 然後試著使用 **變數變換法**. 其實, 與其說它是一個"方法," 不如說是一個"指導原則." 其原則是

> **求 $\int f(x)\,dx$ 的時候, 企圖找到一個變換因式 $w(x)$, 使得 $f(x)$ 可以寫成 $g(w)\cdot w'(x)$. 如此, 則**

$$\int f(x)\,dx = \int g(w)\cdot w'(x)\,dx = \int g(w)\cdot\frac{dw}{dx}\,dx = \int g(w)\,dw.$$

當然, 我們希望 $\int g(w)\,dw$ 是比較容易找到反導函數的積分問題.

例如我們已經知道, 當 $x > 0$ 時, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$. 那麼當 $x < 0$ 的時候, 如果我們令 $w(x) = -x$, 則

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{-w}dx = \int \frac{1}{w}\cdot(-1)\,dx = \int \frac{1}{w}w'(x)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{w}\,dw = \ln w = \ln(-x).$$

所以, 我們得到一個通式:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

但是, 在使用這個公式求定積分的時候要小心, 其積分範圍不能跨過 0. 例如

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_{-2}^{1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \quad \textbf{錯誤}.$$

但是

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

是可以的. 其幾何意義也很明顯, 參見下圖.

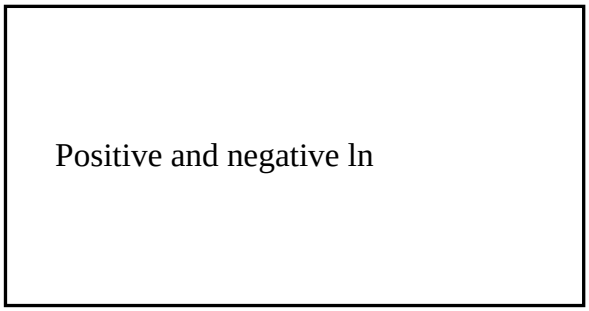

Fig 50

曲線 $\frac{1}{x}$ 在 $[-2,-1]$ 之間與 x-軸所夾的面積應等於它在 $[1,2]$ 之間與 x-軸所夾的面積. 但因前者的曲線在 x-軸下方, 所以其積分值是負的面積.

如果是在定積分的情況下, 我們有兩種作法: (1) 將原來變數的積分上下限 a 和 b 換成 $w(a)$ 和 $w(b)$, 在求得 w 的不定積分後, 直接以 $w(a)$ 和 $w(b)$ 代入求定積分值. 例如課本 **355** 頁的 Example 2. (2) 先求不定積分, 將結果寫回到原來的變數, 然後代入積分上下限. 例如, 上述的例子也可以這麼做:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}w^4\Big|_{\cdot}^{\cdot} = \frac{1}{4}\tan^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

另一種變數變換是在 $\int f(x)\,dx$ 中令 $x = g(w)$, 然後改寫積分問題

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(w))\,d\,g(w) = \int f(g(w))g'(w)\,dw.$$

這裡的 $g'(w) = \frac{dg}{dw}$. 如果是定積分, 就要把積分上下限 a 和 b 換成 $g^{-1}(a)$ 和 $g^{-1}(b)$. 例如課本 **357** 頁的 Example 6, 求橢圓面積的問題, 經過變數變換之後, 得到這樣的積分

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-w^2}\,dw.$$

課本上是以其曲線是單位圓之上半部為由, 用古典的圓面積公式得積分值 $\frac{\pi}{2}$. 其實這個問題可以代入 $w = \sin\theta$, 得

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-w^2}\,dw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta.$$

翻到課本 **366ff** 頁查表, 得知

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\int d\theta.$$

故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

如果在 Maple 中下指令

```
int(sqrt(1-w^2), w);
```

得到答案

$$\frac{1}{2}w\sqrt{1-w^2} + \frac{1}{2}\arcsin w$$

(Maple 沒有寫 C).

在熟悉了變數變換法之後, 我們應該可以看得出來,

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \text{ 和 } \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$$

其實是同樣的積分問題. 因為, 在經過適當的代換之後 (前者代以 $w(x) = e^x$, 後者代以 $w(x) = \sin x$), 兩者都是

$$\int \frac{1}{1+w^2}\, dw.$$

習題 19

這裡再有四十題積分演算. 建議您可以用 Maple 驗證自己的答案.

課本 **346** 頁習題 30–35, 41–44.

課本 **353–354** 頁習題 12–26.

課本 **358** 頁習題 2–16.

19.1 課本 **7.1** 習題 53.

19.2 課本 **7.1** 習題 55.

19.3 課本 **7.2** 習題 44.

19.4 課本 **7.2** 習題 45.

19.5 課本 **7.3** 習題 24–26.