Lecture 2

基本函數

在這門課的一開始, 我們將對所有在中學時候已經學過的函數做一次普查. 例如多項式, 指數函數, 對數函數, 三角函數等等. 我們統稱這些函數為**基本函數** (elementary functions). 這些函數還是少得可憐, 它們並不足以描述所有自然界中的變化情況. 例如圖十五的心電圖圖形, 就不是哪一個基本函數所能描述的.

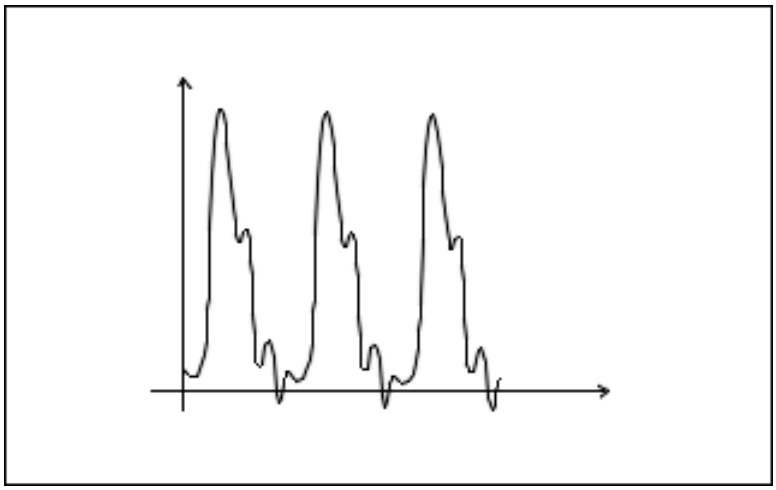

Fig 15

或是圖十六的工業產品設計圖, 也不是哪一個基本函數所能描述的.

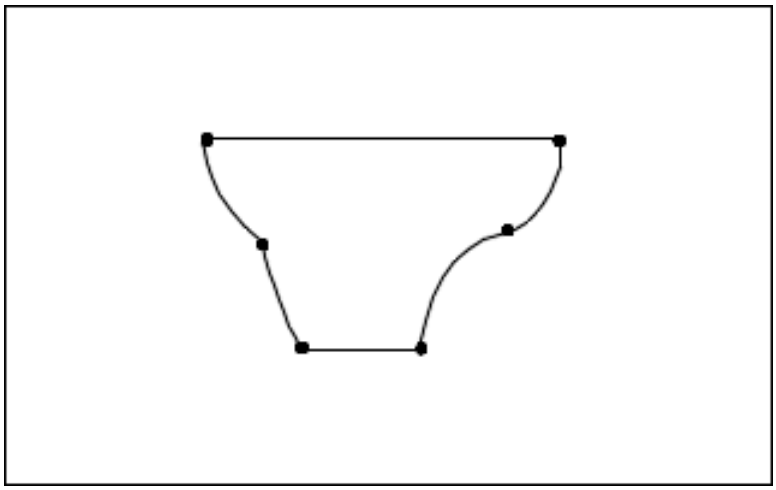

Fig 16

但是, 行遠必自邇, 畢竟這些基本函數是我們熟悉的, 叫得出名字而且知道其性質的函數. 以後您們會學到, 像圖十五這樣的函數, 可以用無窮多個 (或是許多個) 基本函數的和 (例如

sin 函數) 來表示. 為了這種應用, 我們得搞清楚, 什麼是**函數級數**, 它的**和**又是什麼意思? 而像圖十六這樣的函數, 可以用一片一片的基本函數 (例如三階多項式) 銜接起來表示 (稱為**分片多項式**, 或是**樣條函數**, spline, 它們是電腦輔助設計 CAD 的主要工具.)

在學習了微分的技術之後, 我們將發現, 每一個基本函數都有它的微分公式. 任何一個可以微分的函數, 只要您寫得出來它的基本函數表達方程式, 您就可以依照固定的規則, 很機械化的, 求得它的微分. 因此, 我們就不必驚訝於電腦軟體可以幫我們處理這一類的問題.

但是積分就不同了. 為了求積分, 我們必須有獨到的預測眼光. 在求 $f(x)$ 的積分的時候, 我們必須反過來找到某一個函數 $F(x)$ 使得 $F(x)$ 的微分是 $f(x)$. (這裡我用的語言並不精確, 以後會說得更明確.) 我們稱 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的**反導函數**. 這就似乎要有點智慧了. 更何況, 並不是所有你寫得出來的函數, 都有一個你寫的出來的反導函數 (它也許存在, 只是你不能寫出它的基本函數方程式). 例如 2^{-x^2} 就是這種函數.

因此當我們第一次看到電腦軟體可以做積分的時候, 確實會有一點受侵犯的感覺. 近二十年來, 在這一類所謂符號計算或代數計算的算法研究上, 有驚人的進步. 許多我們以前以為需要智慧的工作, 被那些研究人員發現, 其實也只是機械性的勞力工作. 我們可以這樣說, 今天的符號計算軟體, 可以解決大一微積分課本裡所有的計算習題; 萬一在一個專業人員的工作領域中發現了一個這種軟體無法解決的積分問題, 那可能就需要一位非常聰慧的數學家才能解決了.

雖然如此, 我們在前言中已經說明了, 我們仍然要求學生有基本的微積分運算能力.

其他的應用

如果微積分的應用只是求瞬間變化率和曲線下面積, 它就掀不起一場科學革命了. 我們將在這門課程中介紹少數幾種代表性的應用. 我們會盡量選擇那些和各位同學的專業科目相關的應用題材. 但是每個人都應該瞭解, 任何數學工具的應用都是有無窮的可能的. 我們無法預估, 什麼會用到, 什麼不會. 這就好像木匠師傅雖然只教了徒弟如何操刀做一張桌子, 卻不能阻止他用同樣的技術雕一條龍.

但是在這裡, 我們還是淺嚐兩個應用. 首先是一個積分的應用. 所謂一度電, 就是持續一小時消耗一千佰的電力. 想像 x 軸代表以小時為單位的時間, y 軸代表以千佰為單位的耗電量. 則一個用戶的用電量可以畫成一個非負值的分片連續函數. 那麼這個函數和 x 軸所圍成的面積, 就是用電的度數. 每一個電表裡面, 都有一個類比積分器, 不停地以積分計算用戶的耗電度數.

早在電子計算機出現的八十年前, 就有了機械式的類比型計算機, 用來作數值積分. 想像這個類比積分器有兩支筆桿. 輸入者握著一支筆桿描繪函數 $f(x)$ 的圖形. 透過兩片互相垂直摩擦轉動的圓盤, 牽動另外一支筆桿畫出一條正值且漸增的連續曲線. 如圖十七.

在 1880 左右, 英國的一位物理學家 Lord Kelvin 應用這種類比計算機來分析和預測海潮

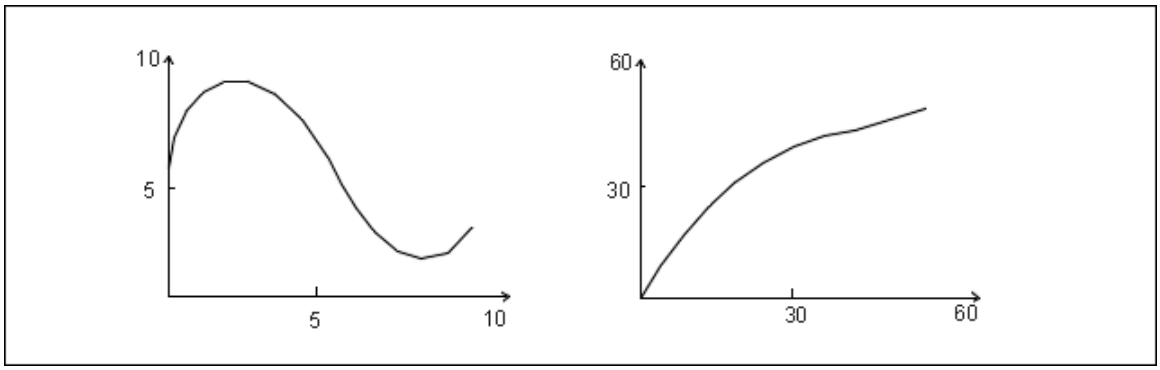

Fig 17

的漲落. 這個世紀初期, 美國的電力公司把這種積分器加上了一些齒輪和碼表, 安裝在客戶的門口, 用以計算電費. 基本上, 這個設計一直用到今天.

其次我們看一個微分的應用. 牛頓曾經發表了一個求解

$$x^3 - 2x = 5$$

的數值計算方法. 這是今天所謂牛頓求根法的濫觴. 奇怪的是, 牛頓始終没有用一般的微分形式來表達他的計算法, 而是用了多項式的特殊微分公式. 以今天的符號來表現, 若是要求 $f(x) = 0$ 的數值解 (而且 $f(x)$ 是可微的), 則令 x_0 是一個靠近真解的數, 做以下的疊代

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

在高中的時候我們聽說過, 如此造成的數列 x_0, x_1, x_2, ..., 將會**逼近**, 或是**收斂**, 到 $f(x) = 0$ 的一個靠近 x_0 的根. 其實, 也許没這麼順利, 詳細的情形大概要等到數值分析這門課來說了. 牛頓法的想法如圖十八.

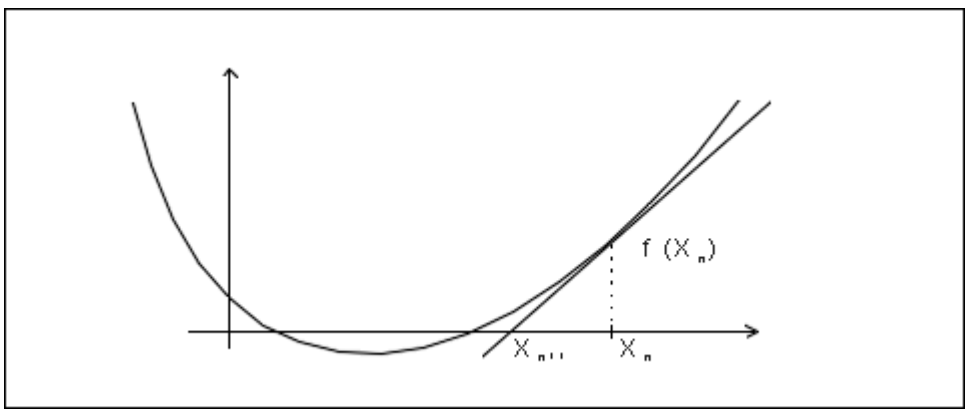

Fig 18

舉一個簡單的例子, 假如我們要求 $f(x) = x^2$ 的零根. 當然你知道答案是 0. 牛頓法的疊代方程式是

$$p_{n+1} = p_n - \frac{p_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}p_n.$$

如果我們取 $p_0 = 1$, 則所造成的 $\{p_n\}$ 數列是

$$p_n = \frac{1}{2^n}.$$

根據我們直觀的認識, x_n 的確在 $n \to \infty$ 的時候**收斂**到 0. 因為從 0 到 x_n 之間的距離, 也就是 2^{-n}, 隨著 n的變大而變小.

我們再看一個例子, 假如我們要求 $f(x) = x^2 - 2$ 的零根. 當然你知道答案是 $\pm\sqrt{2}$. 拿出你的掌上型計算器, 可以得到答案. $\sqrt{2}$ 寫成小數形態的前幾項是

$$1.4142135623731. \tag{2}$$

對這個問題, 牛頓法的疊代方程式是

$$q_{n+1} = q_n - \frac{q_n^2 - 2}{2q_n} = \frac{q_n}{2} + \frac{1}{q_n}. \tag{3}$$

讓我們取 $x_0 = 1$, 則 $\{q_n\}$ 數列的前幾項是

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
q_2 &= \frac{17}{12} = 1.41\bar{6} \\
q_3 &= \frac{577}{408} = 1.414\overline{2156862745098039} \\
q_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.41421356237468\cdots(\text{循環節太長而省略})
\end{aligned}$$

看起來, 我們應該會相信這個數列 $\{q_n\}$ 將會越來越接近 $\sqrt{2}$.

你可以更進一步觀察. 若將 q_1, ..., q_4 與 (2) 中的數字比較, q_1 有一位正確的數字, 也就是說, 誤差大約是 10^{-1}; q_2 有三位正確的數字, 誤差大約是 10^{-3}; q_3 有六位正確的數字, 誤差大約是 10^{-6}; q_4 有十二位正確的數字, 誤差大約是 10^{-12}. 其實我們可以證明, 如果所逼近的根是一個單根, 則當牛頓法數列 x_n 有 k 位正確數字時, x_{n+1} 將會有 $2k$ 位正確的數字.

實數

我們很早以前就自然地接受了實數這個名詞, 而且一點也不猶豫地使用這個名詞. 我們知道實數分成有理數和無理數兩種, 我們知道實數是稠密的. 也就是說, 實數線上沒有空隙. 但

是, 其實有理數就已經是稠密的了. 任意給兩個有理數 $p \neq q$, 則 $(p+q)/2$ 也一定是個有理數, 而且落在 p, q 之間. 那麼, 有理數就幾乎可以把所謂的實數線填滿了嗎? 稠密, 就真的沒有空隙了嗎?

讓我們回到前面的 q_n 數列. 由 (3) 式和數學歸納法, 我們可以證明每一個 q_n 都是有理數. 而我們剛才還堅信著個數列會收斂到 $\sqrt{2}$. 我們也老早就知道, $\sqrt{2}$ 不是個有理數, 它是無理數. 所以, 如果我們僅只考慮有理數 $\mathbb{Q}$ 這個集合, 那麼在 $\mathbb{Q}$ 中的這個數列 q_n 雖然眼看著應該要收斂到某個數了, 但是它卻不能收斂, 因為它將要收斂去的那個數不在 $\mathbb{Q}$ 裡面. 要是把 q_n 這個數列放在實數 $\mathbb{R}$ 中考慮, 它就可以收斂了. 這是實數和有理數的不同. 由此可見, 所謂稠密和沒有空隙這一類直覺的形容詞, 並不足以正確地描述實數的特性. 我們需要更進一步地瞭解實數.

再仔細一想, 我們如何能說 q_n 收斂到 $\sqrt{2}$ 呢? 回顧前面說 p_n 收斂到 0, 我們的直覺認識是, 因為 p_n 和 0 的距離隨著 n 任意變大而任意變小, 所以我們覺得 p_n 會收斂到 0. 現在呢, 我們怎麼計算 q_n 到 $\sqrt{2}$ 的距離? 我們連怎麼把 $\sqrt{2}$ 的十進位表示寫出來都不知道. 仔細想想, 除了用類似 q_n 這種數列, 我們如何能知道 $\sqrt{2}$ 任意長度的十進位數字呢? 所以, 從這個角度來看, 並不是 q_n 收斂到 $\sqrt{2}$, 而是 $\sqrt{2}$ 是被 q_n 這個數列的極限所定義的. 問題是, 我們怎麼能在不運用 $\sqrt{2}$ 這個數值的情況下, 說明 q_n 會收斂? 這就必須要回到, 什麼是實數這個問題了?

習題 2

2.1 如圖十八所示之牛頓法的想法, 其中切線的斜率是 $f'(x_n)$, 它通過點 $(x_n, f(x_n)$. 該線與 x-軸交於 x_{n+1}. 請證明

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2.2 證明講義中的 $\{q_n\}$ 數列遞減. 也就是說,

$$q_n > q_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

2.3 證明 $\sqrt{2}$ 是無理數.

2.4 證明所謂的柯西-史瓦茲不等式 (Cauchy-Schwatz inequality):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

此處 $n \geq 1$ 是個整數, a_k, b_k 均為實數.

2.5 運用 Cauchy-Schwatz 不等式證明

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \forall x, y \geq 0.$$