Lecture 20

課本 7.4 分部積分

分部積分 (integration by parts) 是積分演算的一大技巧. 其基本形式如下:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

如果 v 是一個 x 的函數 $v(x)$, 則

$$dv = v'(x)\,dx.$$

這個公式是由乘法律導出來的:

$$\frac{d}{dx}uv = u'v + uv',$$

所以

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int u'v\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

基本上我們只學習三種積分演算的技巧. 演算 $\int f(x)\,dx$ 的時候, 第一, 我們運用線性性質, 看看是否能夠從基本不定積分公式中找到 $f(x)$ 的反函數. 第二, 我們試試看能否找到變換因式 $w(x)$, 使得 $f(x) = g(w)w'(x)$, 而且 $\int g(w)\,dw$ 是比較簡單的. 第三, 我們試試看能否將 $f(x)$ 拆解成 $f(x) = u(x)\cdot v'(x)$, 而運用分部積分的技巧.

課本 7.8, 7.9 廣義積分

到目前為止, 我們所討論的積分都還在柯西積分理論的範疇之內. 也就是, 閉區間內的連續函數必可積. 黎曼在積分的理論上所做的推廣, 就是界定了一些未必連續的函數在未必有界的區間內的積分理論. 比如說, 函數 $1/x^2$ 在 $[1,\infty)$ 內是連續的, 而 $[1,\infty)$ 不是閉區間. 那麼 $1/x^2$ 在 $[1,\infty)$ 內是否可以積分呢? 或者說 $1/x^2$ 在 $[1,\infty)$ 內的曲線下面積是否為實數呢? 再者, 函數 $1/\sqrt{x}$ 在閉區間 $[0,1]$ 內是不連續的. 但是 $1/\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 內難道就一定不可積分嗎? 或者說 $1/\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 內的曲線下面積難道就一定無窮大嗎?

這一類的積分問題, 我們稱為**廣義積分** (improper integral)* 我們不打算對初學者詳述黎

* Improper integral 或譯成**瑕積分**, 可能是 "improper" 的一種翻譯. 但是我們認為, "improper" 在此應是"不合標準"的意思, 倒沒有什麼"瑕疵"可言. 聽說日語將其譯做廣義積分, 倒是符合其推廣了柯西的積分理論之意. 故取之.

曼積分理論的內情, 只敘述其應用.

若 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 內爲正值連續函數, 且極限

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx \tag{1}$$

存在, 則稱

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{2}$$

可積, 且其積分值爲 (1) 式之極限值. 否則, 稱 (2) 式不可積, 或 (2) 式發散.

注意, 由柯西理論, 對任意一個 $A>a$, (1) 式中的定積分值總是存在的.

由此, 我們看到,

$$\frac{1}{x^3},\quad \frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^{1.09}}$$

這些函數在 $[1,\infty)$ 內是可積的. 但是,

$$x,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{\sqrt{x}},\quad \frac{1}{x^{0.99}}$$

這些函數在 $[1,\infty)$ 內就是不可積的. 一般而言 (課本 **394** 頁有印刷錯誤):

$$\int_1^\infty x^p\,dx=\begin{cases}\frac{1}{p-1} & \text{當 } p<-1,\\ \text{發散} & \text{否則.}\end{cases} \tag{3}$$

幸好萬有引力的作用是一個 $1/x^2$ 的函數, 如果它是個 $1/x$ 的函數, 我們可能永遠沒有辦法離開地球. 因為, 脫離地球的引力所需要的能量, 大約是

$$\int_R^\infty \frac{gmM}{r^2}\,dr,$$

其中 g 是個常數, m 是火箭質量, M 是地球質量, R 是地球半徑.

另一種廣義積分的問題是, 當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內不連續的時候討論它的積分值. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內只在一個點 ξ 處不連續, 而且並非趨近於無窮大, 也就是

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) \text{ 和 } \lim_{x\to\xi^-} f(x)$$

各自存在但是彼此不相等的情形. 則只要運用積分的銜接性即可:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^\xi f(x)\,dx+\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

同理可以推到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內只有有限多個這種不連續點的情形, 就是將 $\int f(x)\,dx$ 拆成有限多片連續的片斷做積分, 然後取和. 我們不在此討論 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內有無限多個不連續點的情形.

如果 $f(x)$ 在 ξ 處不連續, 而且

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to\xi^-} f(x)=\infty,$$

則我們仍然以極限的意義來考慮其可積性.

若 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 中爲正值連續函數, 但

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty.$$

若

$$\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

之極限存在, 則稱

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

可積, 且其積分值爲上述之極限. 否則稱其不可積或發散.

$\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 的處理方式也是完全類似. 如果 $f(x)$ 在 $x=c$ 處無窮大, 但是在 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 中為正值連續函數, 則若 $\int_a^c f(x)\,dx$ 和 $\int_c^b f(x)\,dx$ 分別可積, 就可以利用銜接性得到

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

由此, 我們看到,

$$\frac{1}{x^3},\quad \frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^{1.09}},\quad \frac{1}{x}$$

這些函數在 $(0,1]$ 內是不可積的. 但是,

$$x,\quad \frac{1}{\sqrt{x}},\quad \frac{1}{x^{0.99}}$$

這些函數在 $(0,1]$ 內就是可積的. 一般而言:

$$\int_0^1 x^p\,dx=\begin{cases}\frac{1}{p+1} & \text{當 } p>-1,\\ \text{發散} & \text{否則.}\end{cases} \tag{4}$$

根據 (3) 和 (4) 式, 我們發現 $\frac{1}{x}$ 是一個臨界線. 函數 $f(x)$ 的圖形在 $\frac{1}{x}$ 下方的正值函數, 在 $[0,\infty]$ 內是可積的. 回憶有關"速度"的闡述. 考慮 $[a,\infty)$ 上的連續正值函數 $f(x)$. 當 $x\to\infty$ 的時候, 如果 $f(x)\to 0$ 的速度比 $\frac{1}{x}\to 0$ 的速度還要快; 也就是說當 x 很大的時候, $f(x)\approx\frac{1}{x^p}$, $p>1$. 則 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 內可積. 考慮 $[a,c)\cup(c,b]$ 上的連續正值函數 $f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 c 附近趨於 ∞, 而且它的速度比 $\frac{1}{|x-c|}\to\infty$ 慢; 也就是說當 $x\approx c$ 的時候, $f(x)\approx\frac{1}{|x-c|^p}$, $p<1$. 則 $f(x)$ 在 c 附近可積.

因為

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k,$$

所以, 對任何很大的 x, 都有 $e^x>1+x\approx x$, $e^{ax}>1+x+\frac{x^2}{2!}\approx x^2$, $\cdots$. 概略的說, $e^x\to\infty$ 的速度比任何一個 $x^n\to\infty$ 的速度都快 (只要 n 是個給定的正整數). 倒之, 當 $x\to\infty$, $e^{-x}\to 0$ 的速度比任何一個 $\frac{1}{x^n}\to 0$ 的速度都快. 所以

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \text{ 收斂.}$$

不難求得 $\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$. 因為 $e^{-x^2}\to 0$ 的速度比 $e^{-x}\to 0$ 更快, 所以

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \text{ 收斂.}$$

但是這個廣義積分值就不容易求得了, 因為我們找不到一個 $F(x)$, 使得 $F'(x)=e^{-x^2}$.

我們可以輕易地觀察 $x>\ln x$ $(\forall x>0)$. 所以

$$\int_1^\infty\frac{1}{\ln x}\,dx>\int_1^\infty\frac{1}{x}\,dx \text{ 發散.}$$

其實, 當 $x\to\infty$, $\ln x\to\infty$ 的速度比任何一個 $x^n\to\infty$ 的速度都慢 (只要 n 是個給定的正整數).

習題 20

這裡再有三十五題積分演算. 建議您可以用 Maple 驗證自己的答案. 課本 **364** 頁習題 6–28, 31, 32. 課本 **415** 頁習題 12–17, 19-22.

20.1 課本 **7.4** 習題 33, 35, 36, 38.

20.2 課本 **7.8** 習題 4–6, 16, 19, 28, 31, 32.

20.3 討論 $\int_0^1\ln x\,dx$ 是否可積?

20.4 課本 **7.9** 習題 4, 6–11, 13, 22, 25.