Lecture 21

數學理論的重要性

在前面, 我們說過, 各式各樣的可積分定義, 都是在理論上論斷一個函數在某個區間內是可積還是不可積; 換句話說, 其曲線下的面積, 是有限還是無限. 如果在某個定義的推論之下, 某函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間內是可積的, 那也就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 範圍內的曲線下面積是有限的; 或者說, $f(x)$ 所描述的運動 (或變化) 在 $[a,b]$ 範圍內的總變化量是有限的. 既然有限, 那我們當然想要知道它的數量值. 但是我們怎麼能計算 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的積分值呢? 基本上只有兩種方法: (1) 回到古典的想法, 找到 $f(x)$ 的反導函數 $F(x)$, 然後計算 $F(b)-F(a)$. (2) 如果找不到反導函數, 用一個數值積分的方法, 運用電腦程式來估計其積分值.

那麼, 一個學習微積分的人要問, 理論的作用是什麼呢? 為什麼不直接把積分問題丟到電腦裡面去算就好了呢? 現在, 我們要舉幾個簡單的例子, 表現數學理論的重要性. 雖然這些例子很簡單, 但是我們應當警惕: 類似這樣的情況, 很可能以更複雜的情況在實際應用中出現. 所以我們不能因為例子的簡單而忽略了它們的重要性.

在高中的時候, 我們學習了多項式的微分公式. 所以我們至少知道, 當 n 是個正整數的時候,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

或許有些同學知道, 當 n 是個負整數的時候, 上述公式還是對的. 讓我們先接受這個公式. 所以, 當 $n=-1$ 的時候,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

因此, $-1/x$ 就是 $1/x^2$ 的反導函數 (因為 $-1/x$ 的導函數是 $1/x^2$). 那麼, 根據廣義積分的定義:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx.$$

則

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} 1-\frac{1}{N}.$$

因為

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} = 0,$$

所以 $1/x^2$ 在無限區間 $[1,\infty)$ 內的曲線下面積是有限的; 或說 $1/x^2$ 在 $[1,\infty)$ 可積. 而且其積分值是 1.

把這個問題改變一點點, 問

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

的廣義積分是不是可積呢? 從上面的多項式微分公式裡, 我們恰好找不到 $1/x$ 的反導函數. 所以, 是不是用數值方法試試看呢? 讓我們從最簡單的黎曼和, 也就是說, 以 1 為間隔的 $[1,\infty)$ 均勻分割點來做黎曼和. 讓我們取右黎曼和.

figure

因為 $1/x$ 是個漸減的函數 (它的導數 $-1/x^2 < 0$), 所以

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx > \text{右黎曼和} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

在 (1) 式中右邊的無窮數列和, 稱為一個**級數**. 也可以記做

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{2}$$

讓我們寫一個簡單的 FORTRAN 程式來估計 (2) 式中的級數和:

```
      PROGRAM HARMS
      REAL X, SUM
      INTEGER I, N
      SUM = 0.
      DO 10 I = 2, 3000000
          X = 1./I
          SUM = SUM + X
          IF (MOD(I, 100000) .EQ. 0) WRITE(6,*) I, SUM
10    CONTINUE
      STOP
      END
```

所得的答案如下:

```
100K  11.09085    1100K 13.45273    2100K 14.40369
200K  11.78276    1200K 13.54810    2200K 14.40369
300K  12.19533    1300K 13.64346    2300K 14.40369
400K  12.48143    1400K 13.73883    2400K 14.40369
500K  12.69069    1500K 13.83420    2500K 14.40369
600K  12.88143    1600K 13.92957    2600K 14.40369
700K  13.07126    1700K 14.02493    2700K 14.40369
800K  13.16663    1800K 14.12030    2800K 14.40369
900K  13.26199    1900K 14.21567    2900K 14.40369
1000K 13.35736    2000K 14.31104    3000K 14.40369
```

因此, 你就認為它 "收斂" 到 14.40369 了. 然後, 你大概就會修改上面的程式, 使它在以 $1/2$ 為間隔的 $[1,\infty)$ 均勻分割點上計算右黎曼和. 你應該會看到, 答案 "收斂" 到 13.90369. 你

或許還會注意到, 這個數字和前面的 14.40369 正好差 0.5. 這可以解釋. 因為當我們以 1/2 為間隔的時候, 所得到的右黎曼和是

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots. \tag{3}$$

依此類推, 你將會得到 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ 的數值估計.

以上是個錯誤示範. 如果您仔細一想, 就會說: 不會吧? 當我們以 1/2 為間隔的時候, 所得到的右黎曼和是 (3). 這個數字比 (1) 小 0.5, (而計算結果也同意). 但是, 從圖形上觀察, 以 1/2 為間隔的右黎曼和應該要比以 1 為間隔的右黎曼和來得大才對啊?

我們還没有在數學理論上證明 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ 是可積的. 事實上, 讓我們回頭看看 (2) 式. 其實這個級數是**發散**的. 也就是說它没有極限, 記作

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

一個發散數列的定義如下.

> **若任給一數 $A>0$, 必存在一正整數 N, 使得每當 $n\ge N$, $x_n>A$, 則稱數列 $\{x_n\}$ 發散.**

對一個級數 $\sum a_k$ 而言, 如果定義其 n 項部分和

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

則 s_n 成為一個數列. 如果這個數列 s_n 收斂 (發散), 那就說級數 $\sum a_k$ 收斂 (發散).

讓我們檢查 (2) 式中的級數的前幾項.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\\ =&\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})\\ >&\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}\\ =&\frac{3}{2}.\end{aligned} \tag{3}$$

所以我們可以證明**調和級數** $\sum\frac{1}{n}$ 是發散的.

可見, 14.40369 這個 "收斂值" 根本就是錯的. 為什麼電腦會算錯呢? 這是由於計算機的先天性障礙: 它只能處理有限多個有限位數的數. 詳細的情形, 應該在計算機概論課程中解釋. 凡是做浮點數 (floating number) 計算的程式, 例如以 FORTRAN 或 C 寫出來的程式, 都

是如此. 像 Maple 這類計算軟體, 可以定義任意多位數的計算* 或許可以幫助我們檢查發散的情況. 但是, 其功能還是有限的. 您可以將位數定得很高來作計算, 但是, 那就要花掉很多的時間和記憶體空間. 到最後, 要不是您的記憶體不夠用了, 就是您没有時間等下去了.

利用 Maple 的計算位數限制功能, 我們可以模擬只有兩位數的浮點計算. 因此, 可以更快得看到計算位數對於收斂與發散的誤判所發生的影響.

```
Digits := 2:
harm := 0:
for i from 1 to 30 do
harm := evalf(harm + 1/i);
od;
```

您若執行此 Maple 程式, 會看到 `harm` 的值很快地穩定在 3.9.

現在我們知道 $\sum \frac{1}{n}$ 是發散的, 但是 $\sum \frac{1}{n^2}$ 呢? 仍然是用右黎曼和的想法, 可以看到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 2.$$

可見 $\sum \frac{1}{n^2}$ 是收斂的. 有了這個理論上的基礎, 我們就可以很肯定的使用計算機來估計其收斂值. 稍微修改前面的 FORTRAN 程式, 可以估計收斂值為 1.644786. 以後我們或許會看到它的數學解.

我們看到, 可以利用與已知收斂或發散的級數 (或數列, 積分等) 做到比較, 而判定一個級數 (或數列, 積分等) 是收斂還是發散. 但是要小心判斷的方向. 比某個收斂級數小的級數就一定會收斂, 但是比某個收斂級數大的級數可不一定就發散. 一旦我們利用這些技術證明了一個級數 (或數列, 積分等) 是收斂的, 那麼就可以大膽的使用計算機來估計其數值. 否則, 您的計算結果是非常不可信賴的. 這就是數學理論的重要性.

習題 21

21.1 用 ϵ-N 論證證明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

21.2 證明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

* 比如說, Maple 可以定義精確度到三千位數. 相對於 FORTRAN 的單精度—八位數, 和雙精度—十六位數, 的確是多了很多位. 但畢竟還是有限多位數. 像這個例子中誤判收斂的情況, 還是可能發生.

發散. (您可以推廣 (3) 式中的計算結果.)

21.3 證明級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

當 $\alpha > 1$ 時收斂, 否則發散.