Lecture 22

課本 8.1 從黎曼和到積分式

有時候, 我們把明明是離散的問題給連續化了, 以便運用微積分為工具. 這樣求得的結果, 和直接處理離散問題所得的結果應該是稍有不同的. 但是, 當量很大的時候, 其間的差異是很小的. 我們看到, 連續化之後的問題, 在取了極限之後, 往往將複雜的離散問題變得簡單了. 這是微積分, 或者說是極限觀念, 的威力. 今天, 由於電子計算機的發達, 某些當年難以處理的大型離散問題, 變得可以處理了.

注意, 當 N 很大, δx 很小的時候, $f(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 之間的函數值可以用任一點 $\xi \in [x_k, x_{k+1}]$ 代替. 我們不寫 $f(\xi)$, 就簡單地用 $f(x)$ 來表達了. 這是建立黎曼和的重要步驟. 如果你的黎曼和中出現了 δx 和 $(\delta x)^2$ 項, 則取了極限 $\delta x \to 0$ 之後, 你可以忽略 $(\delta x)^2$. 也就是說, $\sum \delta x \to \int dx$ 而 $(\delta x)^2 \to 0$.

還有, 要注意所有物理單位的一致性.

課本 8.2 截面積與體積

一張紙很難量度厚度, 但是 300 張紙就容易測量了. 把看似没有體積的薄薄的紙疊在一起, 就有了體積. 這就是由截面積求體積的想法. 其實, 數學技術上, 仍然是成立其黎曼和而後取極限.

旋轉體體積和弧長.

$$\sum \Delta x \mapsto \int dx.$$

$$\sum \Delta x \, (\Delta x)^2 \mapsto \int dx, \quad ((\Delta x)^2 << \Delta x).$$

課本 8.3 功, 力, 壓力

回憶以下這個物理定律:

$$\text{功} = \text{力} \times \text{在施力方向上的位移}.$$

所以, 如果你提著一桶水在平面上走了一圈, 在此物理意義上, 没有作功. 因為提水的力是向上的, 而位移是水平的. 回憶力的單位, 牛頓 ($\mathrm{Kg{\cdot}m/sec^2}$); 公斤 ($\mathrm{Kg}$) 是質量單位, 重量是力. 提著 7 Kg 的水, 施力 7×9.8 牛頓. 焦耳 (joule) 是功的單位 (牛頓公尺). 壓力單位: 牛頓/米^2.

課本 8.4 積分與經濟學

也是一種連續化的離散問題. 供需曲線 Fig 8.30 的解釋.

習題 22

22.1 課本 **8.1** 習題 1, 2.

22.2 課本 **8.1** 習題 3. 用 Maple 做這一題的 (a), (c) 部分. [`int(rho, x=0..20);`]

22.3 課本 **8.2** 習題 14.

22.4 課本 **8.2** 習題 16.

22.5 課本 **8.2** 習題 21.

22.6 課本 **8.2** 習題 23, 敘述你的數學模型, 用 Maple 估計其值到六位有效數字.

22.7 課本 **8.3** 習題 1, 6, 7.

22.8 課本 **8.3** 習題 10.

22.9 課本 **8.3** 習題 15.

22.10 課本 **8.4** 習題 2.

22.11 課本 **8.4** 習題 6.

22.12 課本 **8.4** 習題 9.

22.13 課本 **8.4** 習題 10.