Lecture 24

在我們開學之初, 就提到什麼是**實數**這個問題. 後來也提到所謂的**實數建構論**. 一則因為時間的限制, 二則因為這個嚴僅但抽象的建構論並不見得幫助初級的學生更瞭解實數, 所以我們不打算在這裡詳述實數的建構問題. 我們只是延續過去十二年的基礎教育在我們腦中灌輸的**數**的觀念, 再加上一個**完備性**觀念. 在這個意義底下, 我們所謂的"實數"並沒有一個紮實的基礎, 它不像自然數, 有明顯而直覺的計算意義, 也不像有理數, 有明確的定義 (分數). 儘管如此, 大部分的人仍然不懷疑地認為自己瞭解實數. 讓我們就接受這個有點盲目的自信. 因為"怎麼製造實數"這個問題, 也許沒有"實數有什麼性質"這個問題更重要.

讓我們回顧, 實數有什麼性質. 首先, 幾乎每個人都有數線的觀念, 線上每個點對應一個實數, 而且這條數線是緊緊連著的, 沒有任何間隙. **數線**這個觀念, 其實來自**三一律**這個性質:

任何兩個實數 x 和 y, 必符合以下三種關係之其中一種:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

而**沒有間隙**這個直覺, 我們新學到的, 其實要用**完備性**來解讀才正確. 由完備性我們推導出實數的若干重要性質:

- **層層相套的閉區間必有非空之交集.**
- **漸增但有上界之數列必收斂.**
- **非空有上界之集合必有最小上界.**
- **柯西數列必收斂.**

實數的十進位表達

數是一個觀念上的本體. 它可以有不同的表達方式. 就像一個人可以有不同的名字, 一個字可以有不同的寫法和讀音. 我們有時候用 x, ϵ, π, $\sqrt{2}$ 之類的符號代表一個數, 而我們常見的常數表達方式, 例如 1, 2.375, 和 58, 其實是這些數的十進位表達. 如果換成二進位表達, 上述的三個數就是 1, 10.011, 和 111010.

利用"十分法," 可以證明每一個實數都是某個 (不唯一) 漸增數列的最小上界. 例如 19/8 就是

$$2, \quad 2.3 \quad , 2.37 \quad , 2.375 \quad , 2.375 \quad , 2.375, \quad \cdots$$

這個數列的最小上界 (數列確實達到此上界). 而 $\sqrt{2}$ 就是

$$1, \quad 1.4 \quad , 1.41 \quad , 1.414 \quad , 1.4142 \quad , 1.41421, \quad \cdots$$

這個數列的最小上界 (數列達不到此上界, 極限的觀念). 這並不是唯一的漸增而且以 $\sqrt{2}$ 為極限的數列, 另一個老朋友是 **Lecture 2** 中的 $\{q_n\}$ 數列.

說得複雜一點, 我們看到每個實數 x 都找得到一組 (不唯一) 數列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 來逼近它; 也就是說 $\lim x_n = x$. 承續上述的做法, 我們特別令 $x_0 \in \mathbb{Z}$ (x_0 是 $\le x$ 的最大整數), 而

$$x_n = x_0 + a_1 \frac{1}{10} + a_2 \frac{1}{10^2} + \cdots + a_n \frac{1}{10^n},$$

其中 $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 我們挑選最大可能的 a_n 使得 $x_{n-1} \le x_n \le x$. 有可能在某個 N 之後, $x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = x$. 這時候 x 必然是個有理數. 也有可能這個數列永遠嚴格地漸增, 而以 x 為極限. 當然對 $x \notin \mathbb{Q}$ 都是這種情形, 但是對某些有理數也會發生這種情形, 例如 $\frac{1}{3}$. 這時的 $x_0 = 0$, 而 $a_n = 3$, $\forall n > 0$. 我們稱這種十進位表達為循環小數, 記做 $0.\bar{3}$. 用數學式子寫來, 就是

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = 0.\bar{3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n \qquad (\text{其中 } s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k}). \end{aligned}$$

前面的那一番討論, 闡述了這個現象: 任給一個實數 x, 它可以寫成一個無窮級數的和:

$$x = x_0\beta^0 + a_1\beta^{-1} + a_2\beta^{-2} + a_3\beta^{-3} + \cdots, \tag{1}$$

而右端的部分和越來越靠近 x:

$$|x - x_0 + a_1\beta^{-1} + a_2\beta^{-2} + \cdots + a_n\beta^{-n}| \le \frac{1}{\beta^n}.$$

其中 $x_0 \in \mathbb{Z}, 1 < \beta \in \mathbb{0}$, a_i 是介於 0 和 $\beta - 1$ 之間的整數. 例如十進位的時候 $\beta = 10$. 所謂級數就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

這種形式的東西. 所謂它的和, 就是定義其部分和為

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

造成一個數列 $\{s_n\}$, 然後取極限

$$\lim_{n\to\infty} s_n.$$

如果極限存在, 我們說該級數收斂, 而此極限值為級數的和. 否則我們說該級數發散. 例如, 我們已經證明過, $\sum \frac{1}{n}$ 是發散級數, 而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 是收斂級數. Maple 知道怎麼算這個特殊級數的和. 如果你問它 `sum('1/k^2', 'k'=1..infinity);` 它會告訴你答案是

$$\frac{\pi^2}{6}.$$

我們不打算在這裡證明這個事實.*

有些數字寫成 (1) 式級數的時候只有有限長. 有些必須是無窮長. 但是那些無窮長的, 在實際運算的時候, 常常被切斷. 例如 $\sqrt{2}$ 常常被切斷成 1.414. 這是因為切斷後有限長的部分和已經足夠靠近真正的數值了.

現在, 我們要問, 如果給一個函數 $f(x)$, 我們能不能找到一組函數級數, 在某種意義下就像 (1) 那樣的**逼近** $f(x)$? 而且, 當這個級數有無窮多項的時候, 我們可以只取前面的若干項來做 $f(x)$ 的估計函數? 這個問題, 沒有簡單的答案. 課本裡面提供兩種做法:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

和

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \cdots .$$

課本 10.1 泰勒**多項式

局部逼近. 並非"唯一"的逼近方式, 也不是"最佳"的逼近方式, 也不是在計算方法是"最簡單"的逼近方式. 但是, 它是理論上"最簡單," 同時也是理論上"最基本"的逼近方式. 如果 $f(x)$ 本身就是個多項式, 則可以完全相等; 否則就好像用十進位表達物理數一樣, 須有無窮多項.

在附圖五十一–五十四中, 實線是 $f(x)$ 和其泰勒多項式的差, 虛線是泰勒多項式的次一個高階項. 我們看到, 在 0 附近, $f(x)$ 和其泰勒多項式的差越來越靠近水平線.

附錄

我們曾經說過, 不是每個可積的基本函數, 都找得到一個基本函數是其反導函數. 最著名的例子是 e^{-x^2} 和 $\frac{\sin x}{x}$. 這兩個函數在任何閉區間 $[a, b]$ 內都是連續函數, 所以根據柯西積分定理,

$$\int_a^b e^{-x^2}\, dx \quad \text{和} \quad \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx$$

都是可積的; 也就是說, 這兩個定積分值都是有限的. 但是因為我們寫不出它們的不定積分公式, 所以無法使用微積分基本定理來求其定積分值. 我們只好使用數值積分法來估計它們的定積分值.

---

* 不要以為 Maple 真的會算極限的問題, 它只是背了很多公式而已. 你唬它一下, 它就可能不會了. 例如我說 `sum('sin(k*Pi)/k', 'k'=1..infinity);` 它就發呆了.

** Brook Taylor (1685–1731), 牛頓的學生, 於 1715 首次發表這裡訴說的理論.

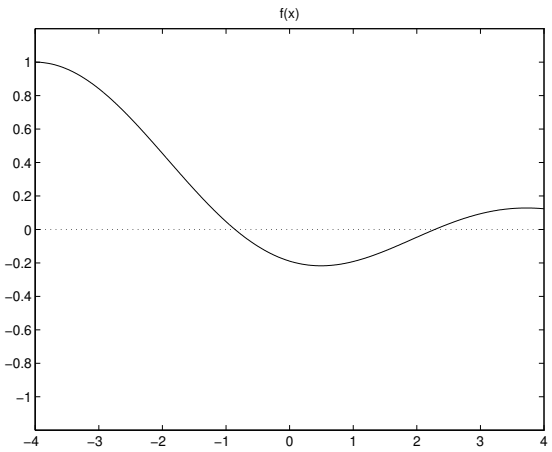

Fig 51

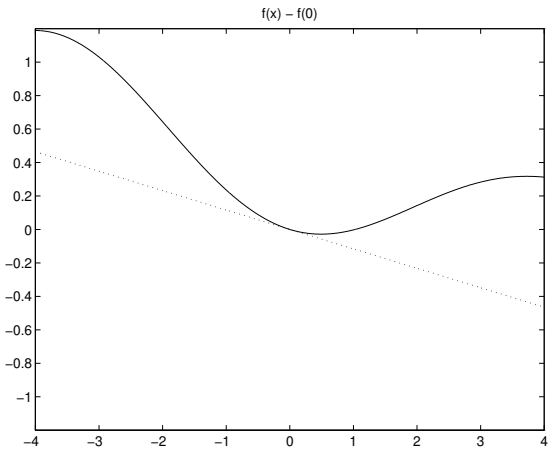

Fig 52

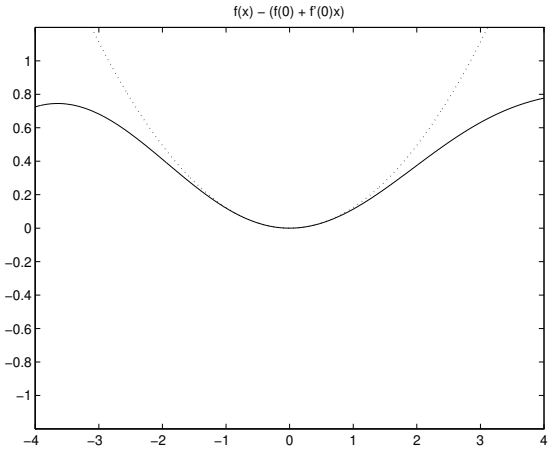

Fig 53

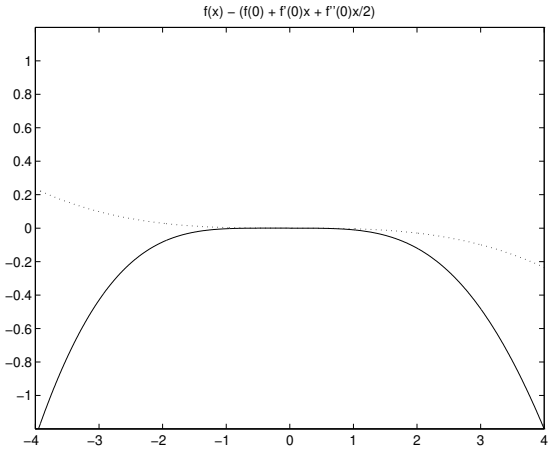

Fig 54

更有趣的是, 雖然我們無法求得上述函數在閉區間內的定積分值, 卻可以求得上述函數在 $[0,\infty)$ 內的廣義積分值:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{和} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

曾經有同學問起, 這是怎麼做出來的. 其實這是很巧妙的情況, 做這兩個廣義積分的技術, 並沒有很普遍的應用. 而且, 其技術部分有點超過了我們目前所學的範圍. 不論如何, 讓我們欣賞一遍, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ 是怎麼求值的.

由習題 **24.1**, 我們知道

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2}.$$

注意上式中 $\int_0^\infty dx$ 指的是對 x 變數積分, 所以 y 只是個參數, 就像個常數一樣. 現在, 我們再對 y 變數做廣義積分:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \lim_{A\to\infty} \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-yx}\,\sin x\,dx\right]\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

這裡就是一個我們還沒學到的東西了:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-yx}\,\sin x\,dx\right]\,dy$$
$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-yx}\,dy\right]\,\sin x\,dx.$$

先做裡面的積分, 把 x 看作一個參數,

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dy = \lim_{A\to\infty} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x}e^{-xA}) = \frac{1}{x}.$$

然後, 外面的積分就變成了

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\sin x\,dx,$$

所以得到答案

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

習題 24

24.1 利用分部積分技巧, 證明

$$\int e^{-px}\,\sin x\,dx = -\frac{e^{-px}(\cos x + p\sin x)}{1+p^2} + C.$$

然後證明

$$\int_0^\infty e^{-px}\,\sin x\,dx = \frac{1}{1+p^2}.$$

24.2 實數的不唯一表達, 不僅在不同進位之下發生, 即使在同一種進位之下也可能發生. 例如 $0.\bar{9}$ 和 1 是同一個數的不同十進位表達. 所以, 當然 $0.\bar{9} = 1$. 奇怪的是, 很多人懷疑這個事實. 讓我們確實來探討這個問題. 請寫出 $0.\bar{9}$ 的極限定義, 然後用極限的 ϵ-N 定義來證明

$$0.\bar{9} = 1.$$

24.3 用 Maple 試試看 `sum('1/k', 'k'=1..infinity);` 的答案是什麼? 而 `sum('sin(k*Pi)/k', 'k'=1..infinity);` 的答案又是什麼? 你認為

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi}{k} = ?$$

24.4 課本 **10.1** 習題 1, 3, 7.

24.5 課本 **10.1** 習題 20. 並且設法用 Maple 把 $1/(1-x)$ 的圖和 $a = 2$, $n = 4$ 的泰勒多項式畫在一起, 範圍是 $(1, 3)$. [參考 **Lecture 18** 裡面的 `display3d` 指令的用法. 但是現在你不是要畫三度空間的投影圖, 而是平面圖. 所以, 試試看 `help(display);`]

24.6 課本 **10.1** 習題 23–26, 回答 a, b, c 的正負號, 不須估計其大小.

24.7 課本 **10.1** 習題 29.