Lecture 3

當我們提到**課本**的時候, 指的是我們的指定參考書:

> Deborah Hughes-Hallett *et al.*, "Calculus." John Wiley & Sons, Inc. 1994. (新月進口)

我們的講義, 原則上只是重述該書中的重點, 並加以補充. 同學們應該詳細閱讀書中的所有文字.

課本 1.2 Linear Functions

當我們在探討分析類問題的時候, 所說的**線性**, 和在探討代數類問題的時候, 所說的線性有稍微的差異. 各位將在另一門稱為**線性代數**的課程裡面學到一種定義比較狹窄的, 所謂**線性映射**. 在此處, 我們說的**線性函數**其實就是**一次多項式**, 亦即

$$y = ax + b.$$

而線性映射必定是將零映射到零的, 也就是說, 沒有平移. 所以一維 (即單變數) 的線性映射就是

$$y = ax.$$

可見一維的線性映射實在沒有太多發揮的空間. 所以, 在線性代數課程裡面, 我們都探討高維 (多變數) 的線性映射. 而加上平移的線性映射, 像我們說的一次多項式, 稱作 affine mapping.

我們可以這樣理解線性函數. 令 x 與 y 分別是兩條平行線 L_1, L_2 的座標, P 是線外一點. 則透過 P 點從 L_1 投影到 L_2 的座標關係, 就是一個線性函數. 如圖十九. 比線性函數稍微複雜一點的有理線性函數, 寫成

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c^2 + d^2 \neq 0.$$

也可以用兩條直線間的投影來表示. 但是此時的兩條直線不平行 (除非 $c = 0$). 如圖二十.

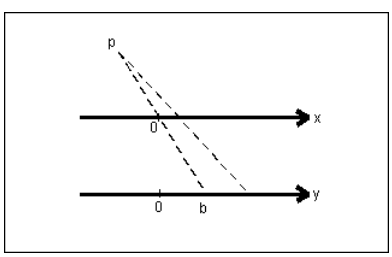

Fig 19

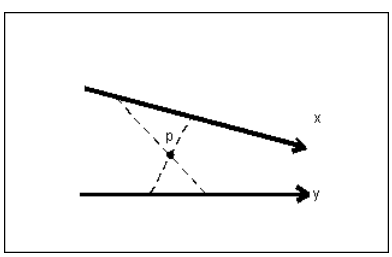

Fig 20

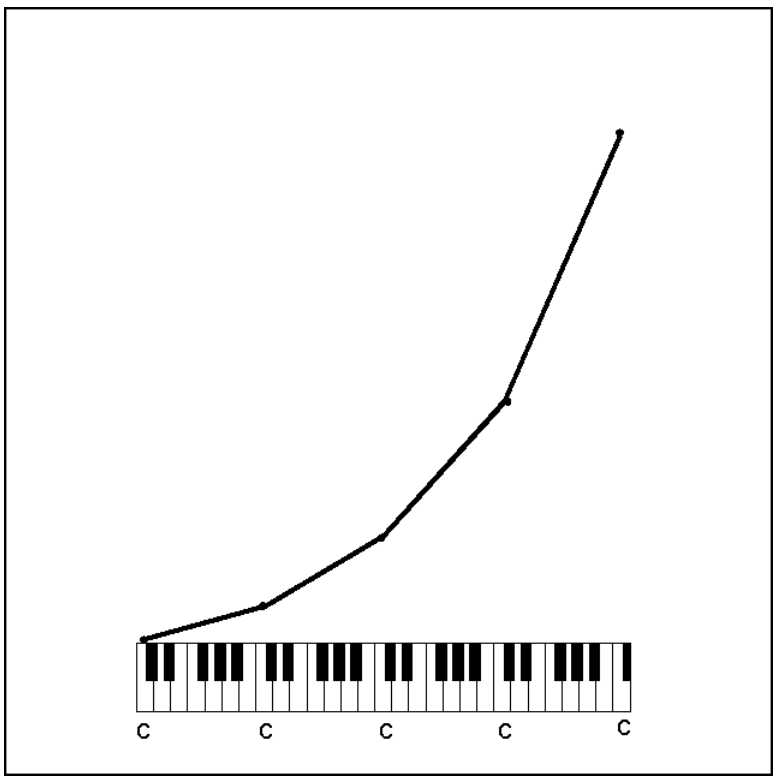

Fig 21

課本 1.3 Exponential Functions

指數函數

$$y = y_0 a^x, \quad y_0, a > 0 \text{ 為定數.}$$

通常我們只考慮 $a > 0$ 的情形. 因為這個底數 a 的意義, 通常是 "成長率" 或 "衰退率." 例如一年的經濟成長率是 3%, 意思是今年的經濟指標是去年的 1.03 倍, $a = 1.03$. 而假如經濟負成長 3%, 也就是說衰退了 3%, 意思是今年的經濟指標是去年的 0.97 倍, $a = 0.97$. 在這種意義之下, 似乎不必考慮負的 a 值.

當 $a > 1$ 時, 是指數成長函數. 標準的例子是一個簡化的生物增長模式: 當食物與空間無限充裕且沒有競爭的時候, 一個生物族群的數量是時間的指數漸增函數. 例如課本上由 1980–1986 墨西哥的人口數估計出

$$P = 67.38(1.026)^t. \tag{1}$$

意思是, 從 1980 開始, 每年的人口數是前一年的 1.026 倍. 常見的說法是, 人口成長率是 2.6%. 另一個有趣的指數成長例子是音階的頻率. 每高八度音, 其頻率是前八度的兩倍. 見圖二十一.

當 $0 < a < 1$ 時, 是指數衰退函數. 標準的例子是放射性物質的衰退. 所謂半衰期就是衰退到原來的量的一半所需要的時間. 例如碳十四的半衰期是 5730 年, 則其衰退函數是

$$C = C_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5730}}.$$

為了計算上的方便, 我們常定義 $0^0 = 1$.

注意, a^x 目前只有對有理數的 x 有意義. 例如 $a^{\frac{m}{n}}$ 的意義, 就是 a^n 的 m 次方根, 其中 n, m 都是整數. 如果 x 是無理數的時候, 例如 $2^{\sqrt{2}}$, 有什麼意義呢? 難道說指數函數只能是 $\mathbb{Q}$ 上的函數而不能是 $\mathbb{R}$ 上的函數嗎? 那就不好了. 我們以後將會定義無理數指數的意義, 使得 a^x 的定義域可以是整個實數.

課本 1.4 Power Functions

冪函數

$$y = kx^p, \quad k, p \text{ 為定數}.$$

通常我們只考慮 p 是有理數的情形. 例如

$$A = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad F = 9.8r^{-2}.$$

注意當 p 是正整數, 零, 負整數時的圖形比較. 當 p 是 (正的) 偶數與奇數時的圖形比較. 還有, 冪函數與指數函數的比較: 指數函數終究會主控整個局面. 課本上可以看到這些圖形. 我們特別要提醒您注意的是當 $p > 1$ 與 $p < 1$ 時在 $x \in (0, 1)$ 與 $x \in (1, \infty)$ 之間的圖形比較. 觀察曲線彎曲的程度, 趨向於無窮大或趨向於零的程度. 基本上, 如果您以 $(1, 1)$ 點為中心, 將會發現 x^p 的曲線圖形隨著

$$p = \text{正非常大} \ldots 1 \ldots 0 \ldots -1 \ldots \text{負非常大} \ldots -1 \ldots 0 \ldots 1 \ldots \text{正非常大}$$

這個順序繞著順時針方向轉動 (以正非常大為十二點鐘方向). 如圖二十二–二十五.

課本 1.5 Inverse Functions

函數 $f(x)$ 的反函數符號是 $f^{-1}(x)$. 一不小心就會以為那是 $f(x)$ 的倒數 $(\frac{1}{f(x)})$ 的意思. 反函數不是倒數, 例如 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ 的反函數是 $F = \frac{9}{5}C + 32$.

未必每個 $f(x)$ 都有反函數. 注意如何從 $f(x)$ 的圖形上觀察它是否有反函數. 如果 $f(x)$ 在整個定義域中沒有反函數, 還是有可能在某個局部的區域內有反函數. 如果 $f(x)$ 在某點 x_0 沒有發生相對極大或極小值, 也就是說, $f(x)$ 在 x_0 的微分不是 0, 則 $f(x)$ 在 x_0 附近可以定義反函數. 將來你或許會學到所謂的**反函數定理**, 將這個直觀的結論推廣到多變數函數去.

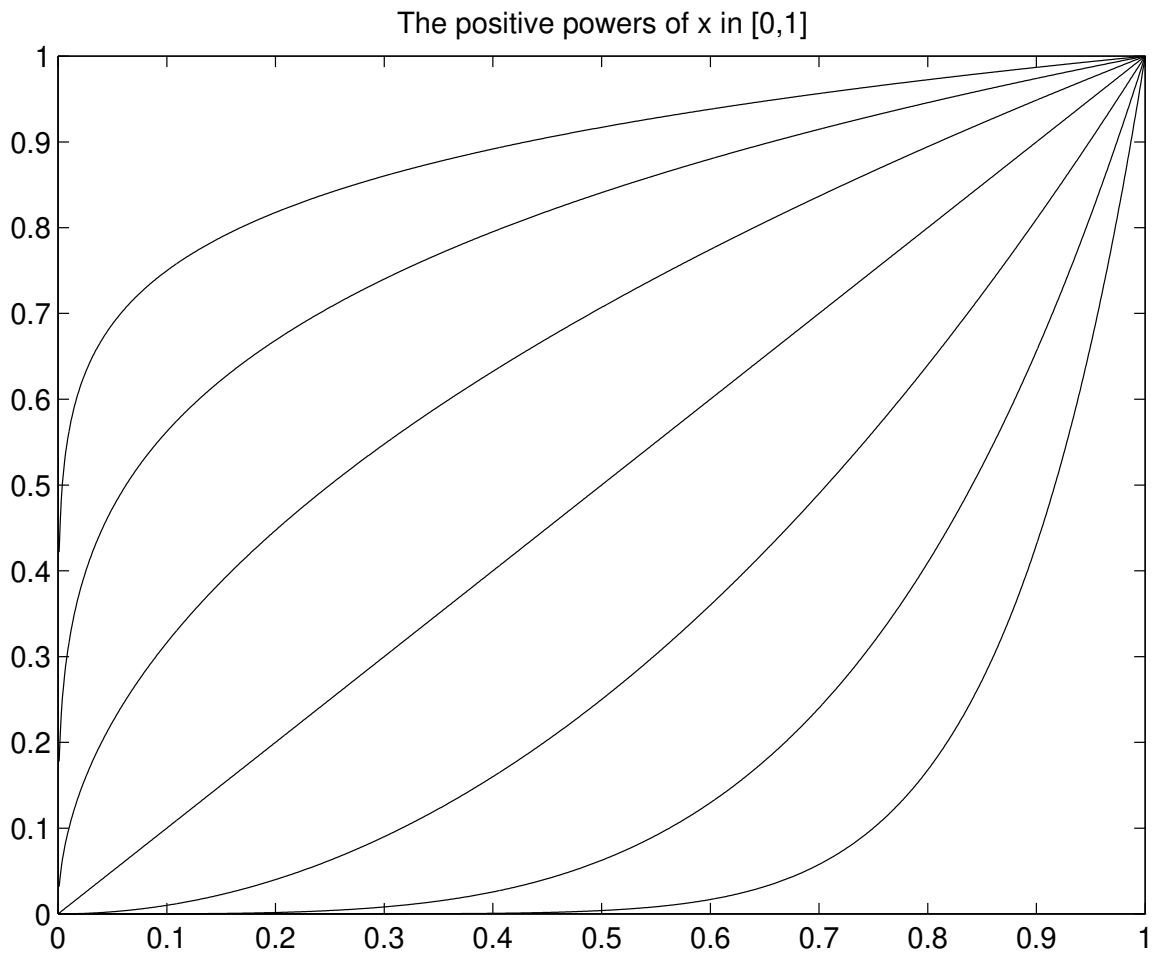
The positive powers of x in [0,1]
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Fig 22

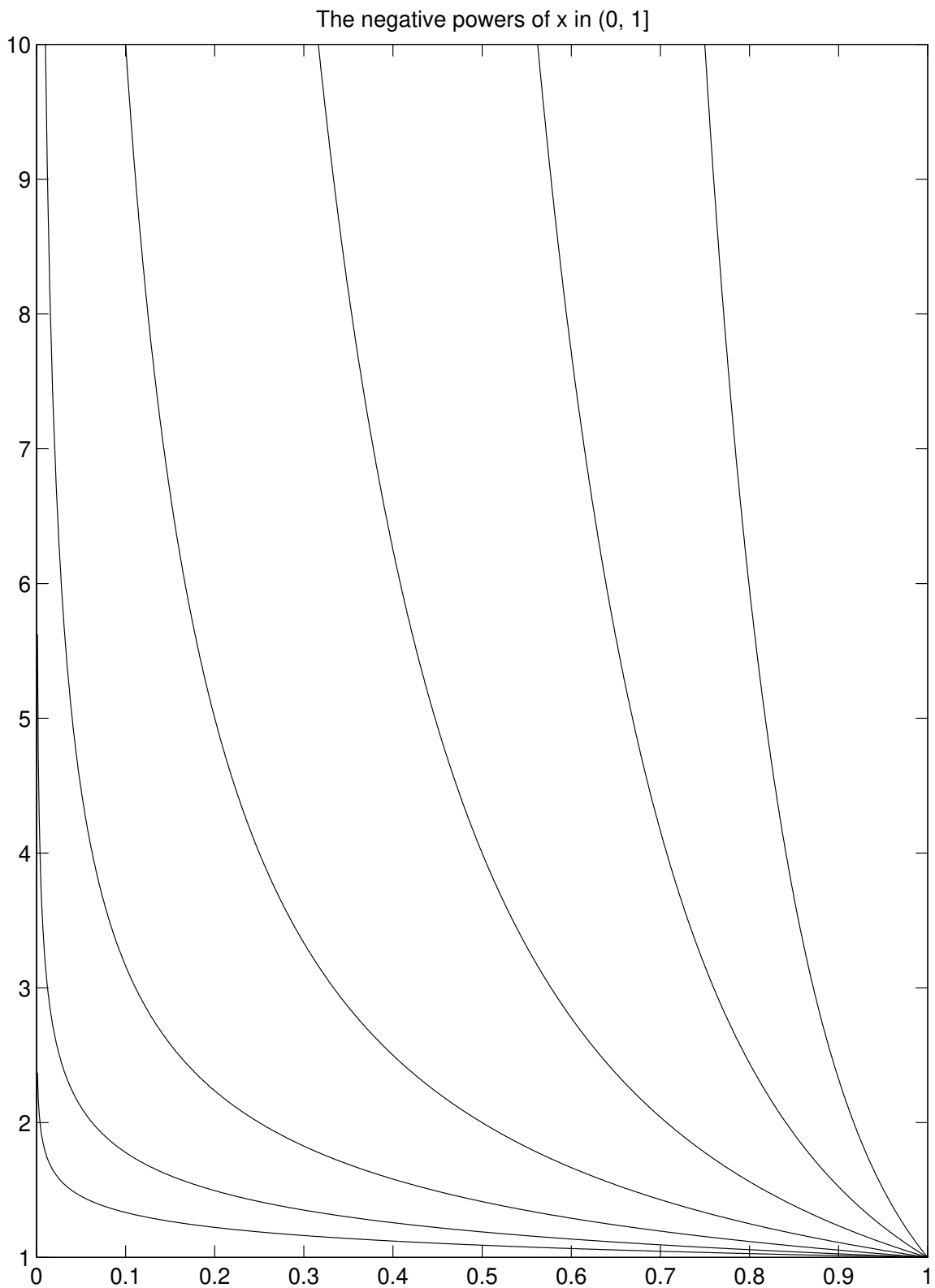
The negative powers of x in (0, 1]
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Fig 23

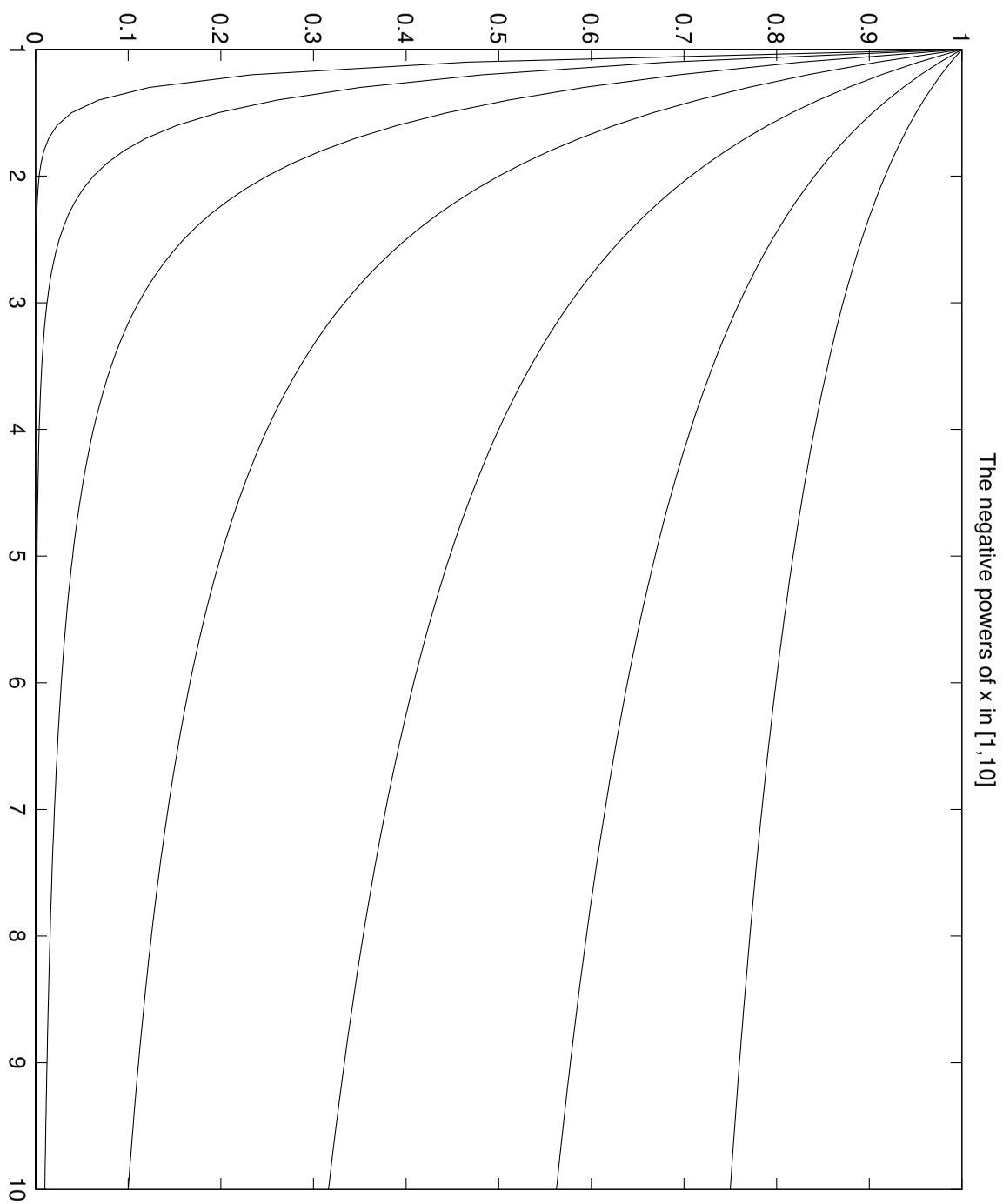
The negative powers of x in [1,10]
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Fig 24

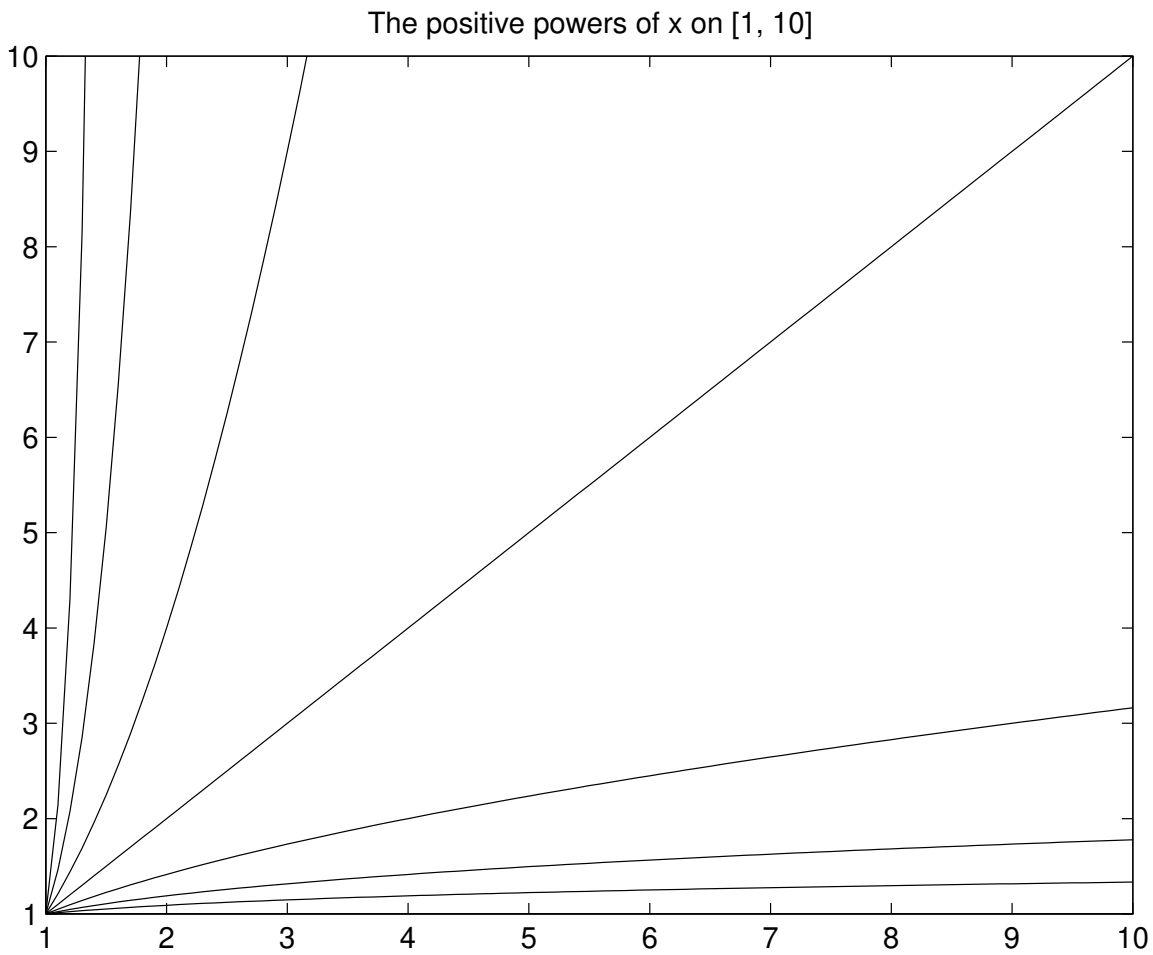

Fig 25

課本 1.6 Logarithms

對數函數. 這是我們的第一個觀念性的函數. 我們可以明確的定義它 ($\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x$), 輕易地推導它的性質 ($\log xy = \log x + \log y$, $\log x^r = r \log x$), 但是通常我們不知道如何去計算它. 譬如要從 (1) 式預測墨西哥的人口數何時會到達一億 ($P = 100$)? 換句話說, 對數函數 $y = \log_a x$ 就是指數函數 $a^x = y$ 的反函數.

在這門課中, 當我們寫 log, 就代表 $\log_{10}$. 這並不是放諸四海而皆準的. 比如說在計算機相關課程中, 常常 log 代表的是 $\log_2$. 但是, 因為

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

所以, 不管以誰為底, log 的值只差一個常數乘積, 定性而言, 它們的差異並不嚴重.

由於求解 $a^x = y$ 和計算 $\log_a y$ 是等價的問題. 一般來說我們都不知道該怎麼辦. 通常必須要藉由數值方法來求得近似值. 例如課本第 40 頁下方所作的計算. 以後, 我們將發現一個更明確的計算方法. 而且, 我們也還不知道當 x 是無理數的時候, 該如何定義 a^x. 換句話說, 我們將要拓展 (extend) a^x 在 $\mathbb{Q}$ 上的定義, 使它可以成為 $\mathbb{R}$ 上的函數.

人稱數學王子的高斯 (Karl Gauss) (史上並沒有人被封為數學皇帝或是數學皇后), 是記錄上第一個肯定數值計算的重要性的人. 他曾經雇用一個人, 專門計算很多對數的值, 製造成對數函數表. 如果需要使用對數的時候, 就去查表. 你要的數就不在表上, 你就要用簡單的內插法去估計那個值. 那個花了幾年的時間受雇做對數表的人, 或許該稱為史上的第一個 "comput*er*."

這個表格當然在後來一再地被堪誤, 被擴充. 而其他觀念性的函數 ($\sin\theta$, $\tan^{-1}\theta$ 等等), 也都分別地被製成數值表格. 在發明了自動計算機之前, 即使是四則運算也是非同小可的智識活動. 只有社會上相對來說受到比較高教育的人才能勝任. 例如在法國大革命之後, 因為許多的貴族都斷送了他們的頭顱, 所以許多失業的美髮師就受雇於巴黎的大學, 計算表格. 這些表格一直使用到小型電子計算器普及了為止. 事實上, 早期的自動計算機, 還以這些表格來驗證它們的運算是否正確.

課本 1.9 New Functions from Old

注意 $y = f(x) + 2$ 和 $y = f(x + 2)$ 的不同意義. 後者稱為 $f(x)$ 的平移 (translation). 注意 $y = f(2^n x)$ 的意義, 稱為 $f(x)$ 的伸縮 (dilation). 練習合成函數的運作. 奇函數與偶函數.

課本 1.11 Polynomials and rational functions

注意多項式的主控項 (the dominant term). 直覺上, 多項式的圖形是一條可以任意彎曲的曲線. 其實多項式不能任意折曲, 一個 k 階多項式只能通過你設定的任意 $k + 1$ 個點. 而且

多項式的圖形一定沒有漸近線, 在整個 $\mathbb{R}$ 上沒有上下界 (unbounded). 包括複數根在內, 一個 k 階多項式必定有 k 個零根. 這是所謂的**代數基本定理**, 高斯的貢獻之一. 由於 k 階多項式的導函數是 $k-1$ 階多項式, 至多有 $k-1$ 個實數根, 所以 k 階多項式在 x-y 平面上的 (實數) 圖形至多與 x-軸有 k 個交點, 而且至多有 $k-1$ 個相對極值; 也就是說, 它最多轉折 $k-1$ 次. 如果你看到一個多項式的圖形有正的相對極小值, 或是負的相對極大值, 就知道它一定有共軛複數根.

有理多項式在分母的零根處有垂直漸近線. 如果分子與分母的階數相等, 也會有水平漸近線. 如果分母的階數較大, x-軸將是漸近線. 如果分子的階數較大, 發散.

習題 3

3.1 課本 **1.2** 習題 7, 8.

3.2 課本 **1.3** 習題 10–13, 16, 21.

3.3 課本 **1.4** 習題 14, 15.

3.4 令 $f_n(x)$ 是一族定義在 $[0,1]$ 上的函數序列:

$$f_n(x) = x^n, \quad n \geq 1, x \in [0,1].$$

用你的直覺, 說明

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

會是怎樣的函數? (它的定義域仍然是 $[0,1]$.)

3.5 課本 **1.5** 習題 16.

3.6 指數函數一定有反函數嗎? 解釋你的答案.

3.7 課本 **1.6** 習題 27, 28.

3.8 課本 **1.9** 習題 4, 6, 15, 30.

3.9 課本 **1.11** 習題 1, 8, 10, 11, 23.