Lecture 4

課本 1.10 Trigonometric Functions

到目前為止, 我們所複習的基本函數: 多項式, 冪函數, $\mathbb{Q}$ 上面的指數和對數函數, 都是所謂的**代數函數** (algebraic functions). 三角函數是我們面臨的第一種**超越函數** (transcendental functions). 這裡所謂的 "超越" 只是表示這一類函數的計算不是以我們所熟知的步驟組合而成. 那些我們所熟知的步驟, 成為代數步驟, 包括了有限多個有理數之間的加減乘除和開整數方根.

另一對相關的名詞是**代數數** (algebraic numbers) 和**超越數** (transcendental numbers). 凡是能成為某一個整係數多項式的根者, 稱為代數數, 否則就是超越數. 有理數皆為代數數, 因為它們是線性函數 $mx-n=0$ 的根. 有一些無理數也是代數數, 例如 $\sqrt{2}$ 是 $x^2-2=0$ 的根. 當 Lambert 在 1761 證明 π 是無理數的時候, 他其實證明了 π 是個超越數. 基本上, 在十九世紀末葉之前, 人們只知道兩個超越數: π 和 e (我們以後會遇到它). 但是 Cantor 帶給人類一個很大的驚異: 實數中絕大多數的數屬於超越數. 欲知詳情的同學, 我們建議您去選修數學系的**集合論**課程.

超越函數的值, 通常需要無窮多個計算步驟才能求得. 這種無窮多的計算步驟, 不是一般直覺所能處理, 我們必須延後討論這個命題. 例如**正弦函數** $\sin x$ 的發現, 就是由一組函數級數得來的. 有點諷刺的是, 牛頓發現 $\sin x$ 的過程, 與今天我們學習 $\sin x$ 的過程完全相反. 當時他是先考慮今天稱為 $\sin^{-1} x$ 的函數.* 求得了 $\sin^{-1} x$ 的級數表示之後, 再反回來求得

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots. \tag{1}$$

這是一個函數級數. 它的確實意義, 必須留到以後再談. 在這裡, 我們可以看到, 對 (幾乎) 任何一個 x, 我們必須經過無窮多個計算步驟才能求得 $\sin x$ 的值. 這也就是為什麼它被稱為**超越函數**. 以後, 我們還會遇到 (至少) 一個超越函數:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

今天, 我們都是從 $\sin x$ 的幾何意義去介紹這個函數. 亦即, 以 x 為一夾角的直角三角形的斜邊與 x 之對邊之比值, 為 $\sin x$. 如圖二十六.

至於 $\sin x$ 的值呢, 我們通常只在幾個特殊的 x 上打轉, 例如 $x=0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 等等. 當我們需要一般的 $\sin x$ 值的時候, 我們就自然地訴諸於計算機. 現在我們看到, 其實 $\sin x$ 的原始定義 (1) 也就同時表明了它的計算方法. 雖然我們不可能計算到無窮多項, 但是總可以計算到某一個有限項為止, 而得到令人足夠滿意的答案. 這裡牽涉到所謂**級數收斂**的問題, 以後再說.

---

* $\sin^{-1} x$ 又寫做 $\arcsin x$, 唸做 ark sine, 是 $\sin x$ 的反函數, 不是 $\frac{1}{\sin x}$.

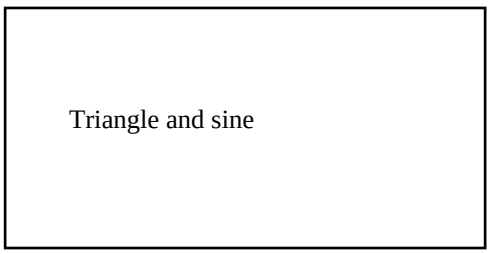

Fig 26

其實這種無窮的計算步驟在古希臘阿基米得 (Archimedes) 的時代就被想過了. 例如 π 的定義, 就是單位圓的面積. 我們稱它為**圓周率**, 因為它是直徑為一的圓周長. 雖然當時的人不確定它是個無理數, 也還沒有所謂實數的觀念, 但是直覺上總有一個數可以代表這個面積的數值. 而且這個數在幾何上又證明了很有用, 無以名之, 就叫它 π 吧. 其實希臘人唸這個字的音是 pi (有如"劈"), 但是到了英國人的嘴裡就成了 pai (有如"拍"). 我想, 可能是因為希臘語原來的發音, 與英語的 P 字母發音一樣, 所以為了區分兩者以便口頭敘述, 才改的唸法吧. 文化之強弱勢如此, 希臘人也無可奈何.

估計 π 這個數值, 成為世界上各民族之間的一種文明里程碑. 西元 250 年前, 阿基米得利用正 96 邊的內接和外接多邊形, 估計 π 的數值介於 $223/71$ 和 $22/7$ 之間. 七百年後祖沖之 (429–500) 估計

$$\pi \approx \frac{355}{113}.$$

今天我們知道這個估計準確到小數點下第六位, 保持了一千年 (?) 的世界記錄. 各位同學如果到台中的自然科學博物館去參觀, 可以看到一部分的相關歷史. 而數學傳播雜誌 [?] 曾有專文介紹這個命題.

讓我們多說一段有關阿基米得的估計方法. 在這裡, 我們看到無窮個計算步驟的想法, 以及所謂數列 (sequence of numbers) 和遞迴公式 (recursion formula) 的想法. 令 p_n 是以 1 為直徑的圓的內接正 2^n 邊形的邊長, 則 $p_2 = 2\sqrt{2}$. 直覺上, 當 n 很大的時候, p_n 差不多就是 π. 而 p_n 和 p_{n+1} 之間的關係是

$$p_{n+1} = 2^n\sqrt{2(1-\sqrt{1-(p_n/2^n)^2})}, \quad n \geq 2. \tag{2}$$

本世紀, 估計 π 的方法還有長足的進步. 今天我們有更快的計算方法. 例如在 Maple 中, 下指令

```
evalf(Pi, 100);
```

你很快就可以看到一百位的 π 值. 不過, 太輕易得到的答案, 反而容易使得我們忘記了它背後的意義.

像 $\sin x$, $\cos x$ 這些三角函數, 每隔 2π 之後就重複其數值的, 稱為**周期函數** (periodic functions). $\sin x$ 的周期 (period) 是 2π. 一般而言, 如果 $c > 0$ 且對所有的 x, $f(x) =$

$f(x+c)$, 則稱 $f(x)$ 是 c-周期函數. 這種函數的圖形, 在每一段 $[x_0, x_0+c]$ 區間中看起來都一樣. 我們常常取 $[0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, \pi]$ 的區間來看 $\sin x$ 函數.

如果將 x 視做時間而 y 視做位移, 則 $y = \sin x$ 所描述的運動稱為**簡諧運動**. 例如在沒有摩擦力和任何能量損耗的情況下, 一端載著重物的彈簧將呈此種運動. 圖形如課本上的圖 **1.67**. 但是, 如果有能量損耗, 那就是阻泥振盪. 圖形就會是像課本上的圖 **5.46** (左圖是阻泥大的, 又圖是阻泥小的).

其他的五個三角函數都只是 $\sin x$ 的變化, 或是直角三角形的三個邊的其他五種比值. 例如 $\cos x$ 只是 $\sin x$ 的一個平移,

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2});$$

我們稱此 $\frac{\pi}{2}$ 為相位差. 而

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

以前我們學過一個六角形示意圖, 來幫助我們記憶這六個三角函數之間的基本關係.

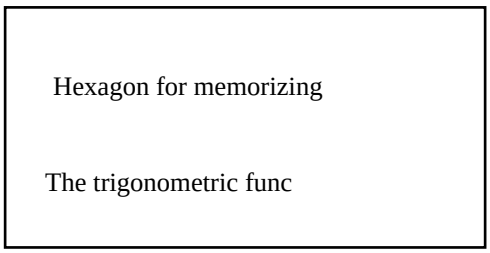

Fig 27

這個圖結合了以下幾種基本關係:

(1) 對角線之兩端互為倒數, 例如 $\sin x \ \csc x = 1$.
(2) 每個頂點為相鄰兩端點之積, 例如 $\sin x = \cos x \ \tan x$.
(3) 三個灰色三角形上, 左上方頂點與右上方頂點之平方和等於下方頂點之平方, 例如 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

除了上述的基本關係, 請各位同學複習幾個常用的等式. 至少包括以下四組:

$$\sin(x+y) = \sin x \ \cos y + \cos x \ \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \ \cos y - \sin x \ \sin y,$$
$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$
$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

所有的周期函數都不可能在整個定義域 ($\mathbb{R}$) 上可逆.* 例如 $\sin x$, 有無限多個 x 使得 $\sin x = 1$. 但是在 $\sin x$ 的相臨兩個波峰和波谷之間, 它是可逆的. 如圖二十八.

所以, 要討論 sin 的逆函數, 是先將 sin 限制在一個一對一函數的定義域之內, 再來討論的. 這時候 sin 是個一對一的函數, 它不再是個周期函數. 通常我們選擇將 sin 的定義域限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 在此區間內, sin 是個嚴格漸增函數, 可以定義它的反函數 $\sin^{-1} x$ (或寫做 $\arcsin x$). $\sin^{-1}$ 的定義域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 嚴格漸增. 圖形如課本的圖 **1.77**. 類似的道理, $\cos^{-1}$ 的定義域是 $[-1, 1]$, 而我們選擇其值域是 $[0, \pi]$, 嚴格漸減, 如圖二十九. $\tan^{-1}$ 的定義域是 $\mathbb{R}$, 我們選擇其值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 嚴格漸增. 圖形如課本的圖 **1.78**.

習題 4

4.1 猜測本節 (1) 式中右端的第 n 項是什麼?

4.2 複習 $\sum$ 符號的使用法. 猜出以下級數的一般項並以 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 的形式寫出其表達式:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{3}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \cdots \tag{6}$$

4.3 利用習題 4.1 的猜測, 將 (1) 式寫成 $\sum$ 表達式.

4.4 如果你需要計算 $\sin 1$ 的值, 準確到小數點下第四位, 則在 (1) 式的右端, 你應該算到第幾項就夠了? 用一個普通的計算器來驗證你的答案.

4.5 課本 **1.10** 習題 32–35, 48, 50.

---

* 也不可能是可積, 除非是零函數.

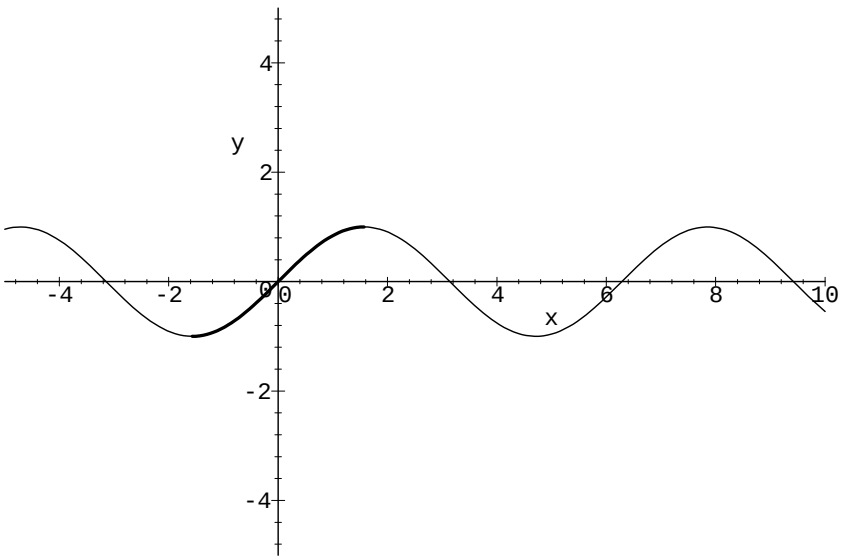

Fig 28

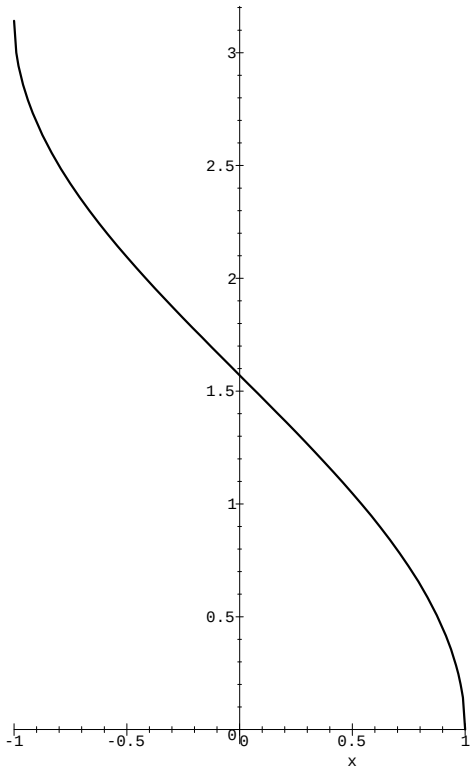

Fig 29