Lecture 5

函數的連續性

在大部分的情況下, 所謂一個函數在某區間中是**連續函數**, 有其非常直覺的意義. 那就是, 函數的圖形在此區間內沒有中斷. 比如說, x^2, $\sqrt{|x|}$, $\sin x$, 都是在 $[-1,1]$ 中連續的函數. 哪個函數不連續呢? 比如說 Heaviside* 函數:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 0, \\ 1 & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

此函數又稱為單位階梯函數 (unit step function). 很明顯地, 這個函數在 $x = 0$ 的地方有一個跳動 (jump), 所以不是 $[-1,1]$ 上的連續函數, 也不是 $\mathbb{R}$ 上的連續函數. 但是它卻是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 上的連續函數. 所以,

當我們說函數連續或不連續的時候, 必須註明所討論的區間.

另一個有名的不連續函數是符號函數

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 sgn 讀作 sign. 因為, 當 $x \neq 0$ 的時候, $|x|/x$ 就是 x 的符號: $+1$ 或 -1. 圖三十和三十一分別是 $H(x)$ 和 $\operatorname{sgn} x$ 的圖形.

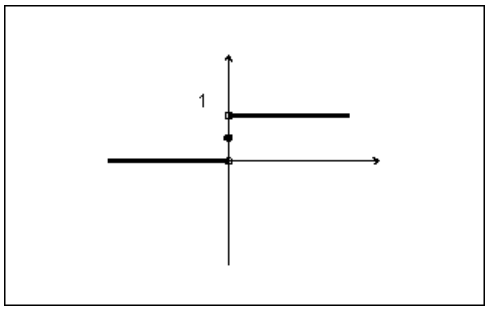

Fig 30

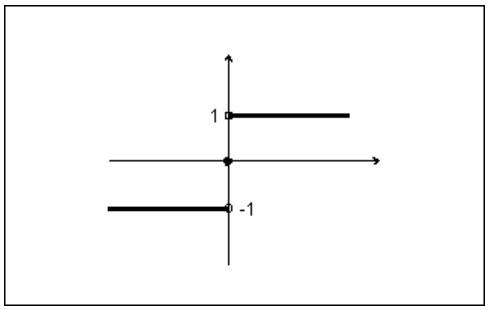

Fig 31

當我們用這種分片的方式來定義函數的時候, 很容易察覺它是否為連續. 還有一種不連續性, 是函數無法定義的不連續. 例如

$$\frac{|x|}{x}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}$$

---

* Oliver Heaviside (1850–1925), 一位英國電機工程師. 他是發現了 Laplace 轉換可以用來解某些微分方程的主要人物. 各位將在工程數學或微分方程的課程中學習 Laplace 轉換. 但是歷史上最先使用 Laplace 轉換這種計算的人是 Euler (1707–1783), 下一個才是 Laplace (1749–1827). 但是因為 Euler 實在創作了太多的數學定理, 算法, 和公式, 所以數學界有時候把 Euler 的一些不太主要的創作, 用下一位發現或應用的人來命名.

都是因為在 $x = 0$ 處無法定義, 所以在 $\mathbb{R}$ 上不連續.

圖形固然可以幫助我們思考和判斷, 但是缺乏明確的邏輯定義. 我們須要一個邏輯上, 或數學上, 嚴格的定義, 使得我們在不方便畫圖或即使畫圖也難以辨識的情況下, 以純邏輯的思維來判定一個函數是否連續. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1}$$

和

$$h(x) \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } x = \frac{1}{n}, \text{ and } n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

這三個函數, 是否在 0 那一點上連續呢?

連續性的簡單含義就是

> **當自變量 x 稍微變動的時候, $f(x)$ 也只有少許的變動.**

例如當 x 在 $[-0.001, 0.001]$ 之間變動的時候, x^2 的變動範圍只有 0.00002; 而當 x 同樣在 $[-0.001, 0.001]$ 之間變動的時候, $H(x)$ 的變動範圍就是 1. 這樣的差別當然是很明顯的. 但是, 這種用數字作例子的方式總是不嚴格的. 例如當我們考慮 x 在 $[999.999, 1000.001]$ 之間變動的時候, 即使是連續函數 x^2 的變動範圍也高達 4.

在數學思想上, 我們的一個大進步就是, 把訴說連續的觀點, 從自變量 x 軸的立場, 改變到隨變量 y 軸的立場來看. 改變了論述的立場之後, 事情就變得清楚了.

讓我們觀察一個不連續函數, 在其不連續處, 有什麼特殊的地方. 例如 $H(x)$ 在 $x = 0$ 處不連續. 此處的函數值是 $\frac{1}{2}$. 它和, 比如說 x^2, 在 $x = 0$ 處有什麼不同呢? 你會發現, **你可以找到一個以 $(0, \frac{1}{2})$ 爲圓心的足夠小的圓, 使得所有其他 $H(x)$ 的圖形都落在這個圓的外面. 所以我們觀察到 $H(x)$ 在 $x = 0$ 處不連續. 相對地, 你將沒有辦法找到一個以 $(0, 0)$ 爲圓心的圓, 使得所有其他 x^2 的圖形都落在這個圓的外面. 所以我們觀察到 x^2 在 $x = 0$ 處連續.**

讓我們來看看, 數學家是怎麼把上面的敘述說清楚的:*

> **如果對所有的 $\epsilon > 0$, 都找得到 $\delta > 0$, 使得凡是 $|x - x_0| < \delta$, 必有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 則 $f(x)$ 在 x_0 處連續.**

這叫做函數 $f(x)$ 在 x_0 點連續的**定義**. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間中的每一點都連續, 則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續.

---

* 如詩一般的優美, 不是嗎?

如果你想要證明一個函數在某點 x_0 處不連續, 你就必須指出它不合乎上面定義的地方. 明確地說, 就是要符合前面定義的*逆敘述*:

> 找得到一個特定的 $\epsilon > 0$, 使得對所有的 $\delta > 0$, 都有至少一個 x,
> $|x - x_0| < \delta$, 但是 $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$

這就是所謂的 ϵ-δ 論證.

讓我們練習用 ϵ-δ 論證來證明 x, x^2 在 $\mathbb{R}$ 上連續, $\sqrt{x}$ 在 $x \geq 0$ 上連續, $\frac{1}{x}$ 在 $x \neq 0$ 上連續, 而 $H(x)$, $\mathrm{sgn}x$ 在 $x = 0$ 處不連續.

習題 5

5.1 利用 $H(x)$ 和 $\mathrm{sgn}x$ 表達以下這個不連續函數:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{for } x < -2, \\ 0 & \text{for } x \in (-2, 0), \\ \frac{3}{4} & \text{for } x \in (0, 7), \\ -2 & \text{for } x > 7. \end{cases} \quad \text{(忽略 } f \text{ 在 } x = -2,\ 0,\ 7 \text{ 的值)}$$

(答案有許多種, 寫出一種就好了.)

5.2 課本 **668** 頁習題 1–4. 你可以先用 Maple 觀察其圖形, 然後試圖用嚴格的 ϵ-δ 論證來證明你的觀察.

5.3 直覺上我們都會同意, 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 各自在 $[a, b]$ 區間中是連續的, 則 $f+g$, $f-g$, $f \times g$ 也都是連續的. 試用的 ϵ-δ 論證來證明, $f + g$ 也是個連續函數.